

例題 1

次の整数を素因数分解しなさい。

(1) 10

(2) 18

(3) 308

素数は小さい順に 2, 3, 5, 7, 11, 13... です。

整数を小さい素数から順に割っていき積の形にすることを「素因数分解する」といいます。

$$\begin{array}{r} (1) \ 2 \overline{)10} \\ \underline{2} \\ 5 \\ \hline \end{array}$$

2x5

最後が素数に
なったらおわり

$$\begin{array}{r} (2) \ 2 \overline{)18} \\ \underline{2} \\ 3 \overline{)9} \\ \underline{3} \\ 3 \\ \hline \end{array}$$

2x3x3

3 からわっても
よいが数字は
小さい順に並
べる

$$\begin{array}{r} (3) \ 2 \overline{)308} \\ \underline{2} \\ 2 \overline{)154} \\ \underline{2} \\ 7 \overline{)77} \\ \underline{7} \\ 11 \\ \hline \end{array}$$

2x2x7x11

例題 2

素因数分解を利用して、次の整数の約数の個数を求めなさい。

(1) 16

(2) 126

次のように 素因数分解をして 約数の個数を知ることができます。

a, b を素数とすると, $a \times a \times b$ の
約数の個数は

$$\begin{aligned} & a \text{ が } 2 \text{ 個}, b \text{ が } 1 \text{ 個} \text{ のとき} \\ & (2+1) \times (1+1) \\ & = 3 \times 2 \\ & = 6 \text{ (個)} \end{aligned}$$

 $a \times a \times a \times b \times b$ の約数の個数は

$$\begin{aligned} & a \text{ が } 3 \text{ 個}, b \text{ が } 2 \text{ 個} \text{ のとき} \\ & (3+1) \times (2+1) \\ & = 4 \times 3 \\ & = 12 \text{ (個)} \end{aligned}$$

なぜこうなるか? は次ページ
で詳しく説明します。

(1) 16 を素因数分解すると、

$$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

2 が 4 個の積ですから上の公式
より 約数の個数は、

$$(4+1) = 5 \text{ 個} \text{ となります。}$$

5 個

(2) 126 を素因数分解すると、

$$126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$$

2 が 1 個, 3 が 2 個, 7 が 1 個ですからから、
上の公式より 約数の個数は、

$$(1+1) \times (2+1) \times (1+1) = 2 \times 3 \times 2 = 12 \text{ 個} \text{ となります。}$$

12 個

$a \times b$ の約数は a と b に分けて表をつくると、

1 も約数なので右の図のようになります。

(ます目の数が約数の個数です)

(a の個数 + 1) $\times$ (b の個数 + 1)

$$(2+1) \times (1+1) = 3 \times 2 = 6$$

	1	a	a×a
1			
b			

予習シリーズではココを a が 0 個、 b が 0 個と解説しています。

(1) $32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

	1	2	2×2	2×2×2	2×2×2×2	2×2×2×2×2
	○	○	○	○	○	○

2 が 0 個のときを考える

→ 6 個

(2) $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

	1	2	2×2	2×2×2
1	○	○	○	○
3	○	○	○	○
3×3	○	○	○	○

→ 12 個

2 が 0 個、3 が 0 個のときを考える

(3) $126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$

	1	2
1	○	○
3	○	○
3×3	○	○

×

	1	7
1	○	○
7	○	○

→ $6 \times 2 = 12$ 個

2 が 0 個、3 が 0 個、7 が 0 個と考える

例題3

300の約数のうち、5の倍数は何個ありますか。

解1 約数の個数の公式を使う方法

まず、300を素因数分解します。

$$300=2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$$

2個ある5のうち 1つでも5を使えば5の倍数 になりますから、

5の倍数の個数とは

5を1個使ったときと2個使ったときの
(2, 2, 3)の部分の約数の個数との組み合わせの個数です。

2を使った個数は(2+1)=3通り

3を使った個数は(1+1)=2通り

5を1個使うときと2個使うときの2通りありますから、

求める個数は、

$$3 \times 2 \times 2 = \underline{12}(\text{個}) \text{ となります。}$$

12 個

解2 原始的な方法です。

かけて 300 になる組み合わせをかきだします。

$$1 \times 300 \quad 2 \times 150 \quad 3 \times 100 \quad 4 \times 75 \quad 5 \times 60 \quad 6 \times 50$$

$$10 \times 30 \quad 12 \times 25 \quad 15 \times 20$$

この中で 5の倍数が含まれる数に印をつけて 数えます。

$$1 \times \textcircled{300} \quad 2 \times \textcircled{150} \quad 3 \times \textcircled{100} \quad 4 \times \textcircled{75} \quad \textcircled{5} \times \textcircled{60} \quad 6 \times \textcircled{50}$$

$$\textcircled{10} \times \textcircled{30} \quad 12 \times \textcircled{25} \quad \textcircled{15} \times \textcircled{20}$$

以上 12 個です。

入学試験の実戦では この原始的な方法が役に立つことがあります。

正解すればいいのです。

例題 4

- (1) 約数の個数が 3 個である整数を、最も小さい整数から順に 3 つ答えなさい。
 (2) 1 以上 30 以下の整数のうち、約数の個数が 4 個である整数は何個ありますか。

3×3 や $5 \times 5 \times 5 \cdots$ などのように、同じ素数の積で表される整数の約数の個数は、

3×3 の場合 $a \times a$ となるので 約数の個数はどれも $(2+1)=3$ 個

2 個

a, b は素数です。

$5 \times 5 \times 5$ の場合も $a \times a \times a$ となるので 約数の個数はどれも $(3+1)=4$ 個 になります。

3 個

さらに、

3×5 のように $a \times b$ のパターンも $(1+1) \times (1+1)=4$ 個 になります。

また、

$3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7$ などのような場合 $a \times a \times a \times b \times b$ となるので 約数の個数は $(3+1) \times (2+1)=4 \times 3=12$ (個)

(1)

約数が 3 個である整数は $a \times a$ になるときで
 すから 小さい順に

$2 \times 2=4$ $3 \times 3=9$ $5 \times 5=25$ です。

4, 9, 25

※ a は素数ですから 1×1 や 4×4 は × です。

(2)

上の公式から

$a \times a \times a$ のパターン

・ $a=2$ のとき $2 \times 2 \times 2=8$

・ $a=3$ のとき $3 \times 3 \times 3=27$

・ $a=5$ のとき $5 \times 5 \times 5=125 \cdots \times$ (30 以下の整数より)

$a \times b$ のパターン

・ $a=2$ $b=3$ のとき $2 \times 3=6$

・ $a=2$ $b=5$ のとき $2 \times 5=10$

・ $a=2$ $b=7$ のとき $2 \times 7=14$

・ $a=2$ $b=11$ のとき $2 \times 11=22$

・ $a=2$ $b=13$ のとき $2 \times 13=26$

・ $a=3$ $b=5$ のとき $3 \times 5=15$

・ $a=3$ $b=7$ のとき $3 \times 7=21$

以上、 $2+7=9$ (個)

9 個

例題 5

- (1) 整数 A と 63 の 最大公約数は 9 , 最小公倍数は 630 です。 A を求めなさい。
- (2) 2 つの整数 A , B があります。 B は A より大きく、 A と B の最大公約数は 6 , 最小公倍数は 144 です。 A , B の組として考えられるものを (A , B) の形ですべて答えなさい。

(1)

まず、下のような 連除法の形をかきます。

最大公約数

$$\begin{array}{r} 9 \overline{) A \quad 63} \\ a \quad b \end{array}$$

a と b は互いに素
(これ以上共通の約数をもたない)

$$9 \times a = A \cdots \text{ア}$$

$$9 \times b = 63 \cdots \text{イ}$$

$$9 \times a \times b = 630 \cdots \text{ウ}$$

$$\text{イより } b = (63 \div 9) = 7$$

これをウの式に代入すると、

$$9 \times a \times 7 = 630 \quad (\text{※アより } 9 \times a = A) \text{ なので}$$

$$A \times 7 = 630$$

$$A = 630 \div 7$$

$$= 90$$

$$90$$

(2)

(1) と同様に連除法の形をつくりま

す。

最大公約数

$$\begin{array}{r} 6 \overline{) A, B} \\ a \quad b \end{array}$$

ここで、

$$6 \times a = A$$

$$6 \times b = B$$

$$6 \times a \times b = 144$$

$$a \times b = 24 \quad \text{6 である}$$

かけ算して 24 になる数を探
します。

(a) (b) $a < b$

$$1 \times 24 \cdots \cdots \text{O}$$

$$2 \times 12 \cdots \cdots \text{X}$$

$$3 \times 8 \cdots \cdots \text{O}$$

$$4 \times 6 \cdots \cdots \text{X}$$

上の X 印の $a=2, b=12$ や

$a=4, b=6$ は 下のようにさらに 2
でわれてしまい最大公約数が 6 で
なくなってしまう。

$$\begin{array}{r} 6 \overline{) A, B} \\ 2 \overline{) 2, 12} \\ 1 \quad 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \overline{) A, B} \\ 2 \overline{) 4, 6} \\ \quad 2, 3 \end{array}$$

 a と b は互いに素です。

(これ以上共通の約数をもたない)

したがって、

$$a=1, b=24$$

$$A=6 \times 1 = 6$$

$$B=6 \times 24 = 144$$

$$(6, 144)$$

$$a=3, b=8$$

$$A=6 \times 3 = 18$$

$$B=6 \times 8 = 48$$

$$(18, 48)$$

$$(6, 144) \quad (18, 48)$$

例題 6

1 より小さい、分母が 96 の分数を、下のように小さい方から順にならべました。既約分数は何個ありますか。

$$\frac{1}{96}, \frac{2}{96}, \frac{3}{96}, \frac{4}{96}, \dots, \frac{94}{96}, \frac{95}{96}$$

$\frac{96}{96}$ は約分できるので、分子を 1～96 までとしても既約分数の個数はかわりませんから

(1) 分子を 96 までとして考えます。(計算がしやすいから)

分母の 96 を素因数分解すると、

$$96 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \text{ より、}$$

分子が 2 の倍数か 3 の倍数のときに約分されます。

・分子の 2 の倍数の個数は、

$$96 \div 2 = 48 \cdots \text{より } 48 \text{ 個}$$

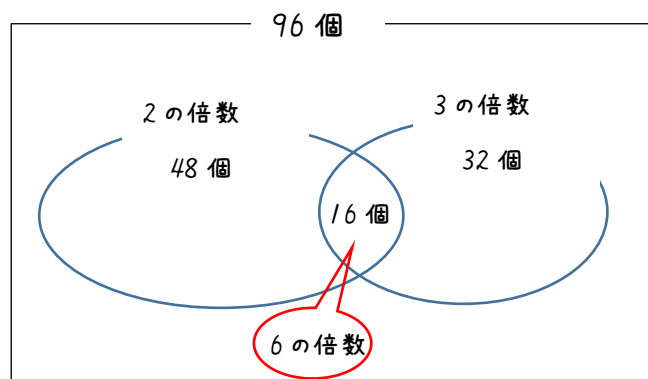
・分子の 3 の倍数の個数は、

$$96 \div 3 = 32 \cdots \text{より } 32 \text{ 個}$$

・分子の 6 の倍数の個数は、

$$96 \div 6 = 16 \cdots \text{より } 16 \text{ 個}$$

(2 と 3 の最小公倍数)



・約分できる個数は、

$$48 + 32 - 16 = 64 (\text{個})$$

・既約分数の個数は、

$$96 - 64 = 32 (\text{個})$$

ダブっている 16 個を引きます。

32 個

例題 7

次のように、1 から順に整数を 30 までかけた積を A とします。

$$A = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 29 \times 30$$

- (1) A を 2 でわり続けるとき、何回目ではじめて商が整数でなくなりますか。
 (2) A は一の位から 0 が何個連続して並びますか。

(1) 例えば 6 は 2×3 なので 2 で 1 回わるすることができます。

これは 6 の中に 2 が 1 個あるからです。

すると $A = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots$ の中に 2 が何個あるか 分かればいいわけです。

2 は 2 が 1 個ですが、4 は 2×2 で 2 個、8 は $2 \times 2 \times 2$ で 3 個、16 は 2 が 4 個あります。

したがって、次のように 2 の個数を数えることができます。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2 が 1 個 2 の倍数		○		○		○		○		○		○		○		○
2×2 4 の倍数				○				○				○				○
$2 \times 2 \times 2$ 8 の倍数								○								○
$2 \times 2 \times 2 \times 2$ 16 の倍数																○

2 の倍数の個数 $\cdots 30 \div 2 = 15 \Rightarrow 15$ 個

4 の倍数の個数 $\cdots 30 \div 4 = 7. \cdots \Rightarrow 7$ 個

8 の倍数の個数 $\cdots 30 \div 8 = 3. \cdots \Rightarrow 3$ 個

16 の倍数の個数 $\cdots 30 \div 16 = 1. \cdots \Rightarrow 1$ 個

以上より、2 の個数は

$$15 + 7 + 3 + 1 = 26 \text{ (個)}$$

$\Rightarrow 26$ 回割り切れて 27 回目に商は整数でなくなります。

27 回目

(2) 0 が 1 つ できるには 2×5 のセットが 1 つ必要 です。

したがって、このセットが何個あるか 調べればよいことになります。

明らかに 2 の数より 5 の数の方が少ない ので 少ない方の 5 の個数を調べます。

1 2 3 4 ⑤ 6 7 8 9 ⑩
 11 12 13 14 ⑮ 16 17 18 19 ⑳
 21 22 23 24 ㉕ 26 27 28 29 ㉟

$25 = 5 \times 5$ で 5 が 2 個 ありますが

25 以外は 5 の個数が 1 個です。

したがって、全部で 5 の個数が 7 個 ですから

0 が 7 個 並びます。

7 個