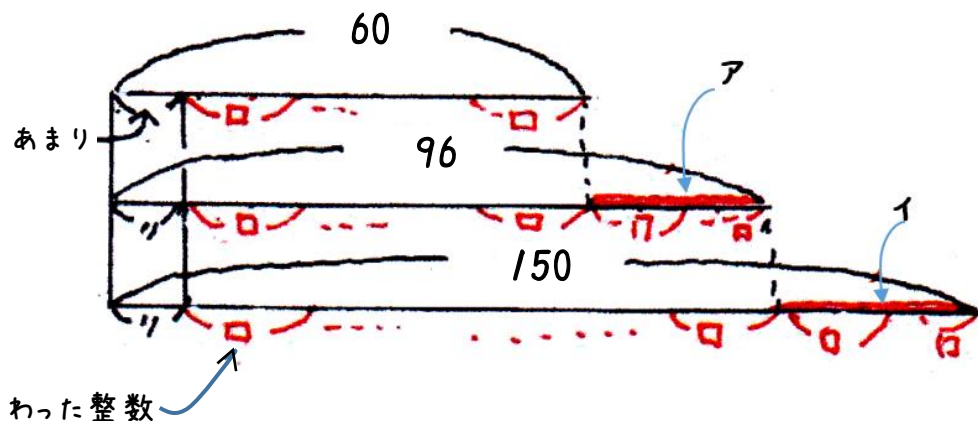


必修例題1 ★★☆☆ (標準) <<あまりが同じ>>

3つの整数{60, 96, 150}を同じ整数でわって商を整数で求めたところ、どれもわり切れず、あまりが等しくなりました。わった整数として考えられるものをすべて答えなさい。

共通のあまり部分を左はしにそろえて下のような図をかきます。



あまりを除いた部分は「ある数□」でわりきれます。

アの長さは、 $96 - 60 = 36$

イの長さは、 $150 - 96 = 54$

□は、36と54の公約数です。

最大公約数は18なので、

18の約数は、 $1 \times 18 \quad 2 \times 9 \quad 3 \times 6 \Rightarrow 1, 2, 3, 6, 9, 18$

この中で、1, 2, 3, 6ではわり切れてしまうので、条件にあうのは9と18になります。

9, 18

必修例題2 ★★☆☆ (標準) <<平方数を作る～素因数分解の利用～>>

A～Dはどれも1以上の整数です。

(1) $45 \times A = B \times B$

が成り立つとき、Aとして考えられる最も小さい整数と、そのときのBを求めなさい。

(2) $\frac{360}{C} = D \times D$

が成り立つとき、Cとして考えられる最も小さい整数と、そのときのDを求めなさい。

(1)

45を素因数分解すると、

$$45 = 3 \times 3 \times 5$$

もとの式は、

$$3 \times 3 \times 5 \times A = B \times B$$

左辺の 3×5 が2セットできればよいので、

$A=5$ (※もっとも小さい整数)

↓

$$B \times B = (3 \times 5) \times (3 \times 5)$$

$$\Rightarrow B=15$$

$$A \cdots 5 \quad B \cdots 15$$

(2)

360を素因数分解すると、

$$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$$

もとの式は、

$$\frac{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5}{C} = D \times D$$

Cの数字で約分された結果整数が2セットできればよい。

$$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5}_{\text{2セット}}$$

2×5 がなければ 2×3 が2セットできますから、
Cとして考えられる最小の整数は、

$$2 \times 5 = 10 \text{ です。}$$

このとき、

$$(2 \times 3) \times (2 \times 3) = D \times D \text{ より、}$$

$$D = 2 \times 3$$

$$= 6 \text{ となります。}$$

$$C \cdots 10 \quad D \cdots 6$$

発展例題1 ★★★ (応用) <<単位分数の和>>

難関校対策

$$\frac{4}{15} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B}$$

が成り立つとき、2つの整数A, Bの組として考えられるものを(A, B)の形ですべて答えなさい。
ただし、 $A < B$ とします。

$\frac{4}{15}$ の真ん中の分数を調べます。

$$\frac{4}{15} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{15} \Rightarrow 15 \div 2 = 7.5 \text{ より真ん中の値は } \frac{1}{7.5}$$

$$\frac{1}{A} > \frac{1}{B} \text{ ですから, } \frac{1}{A} > \frac{1}{7.5}$$

$$\text{また, } \frac{4}{15} = \frac{1}{3.75} \text{ より, } \frac{1}{A} < \frac{1}{3.75}$$

↓

$$\frac{1}{A} \text{ は } \frac{1}{7.5} \text{ より大きくて, } \frac{1}{3.75} \text{ より小さい}$$

↓

Aは3.75より大きくて7.5より小さい

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{4}{15} \text{ の式に } A \text{ の値を代入します。}$$

A < B に注意!

・A=4 のとき

$$\frac{1}{B} = \frac{4}{15} - \frac{1}{4} = \frac{1}{60} \Rightarrow \underline{B=60}$$

・A=5 のとき

$$\frac{1}{B} = \frac{4}{15} - \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \Rightarrow \underline{B=15}$$

・A=6 のとき

$$\frac{1}{B} = \frac{4}{15} - \frac{1}{6} = \frac{1}{10} \Rightarrow \underline{B=10}$$

・A=7 のとき

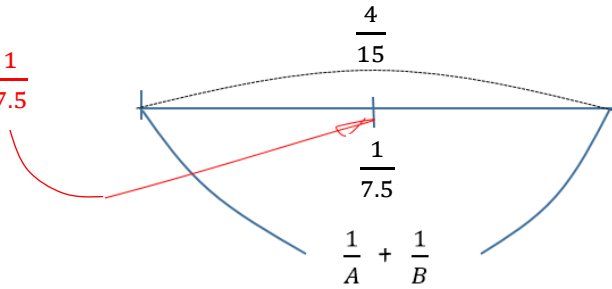
$$\frac{1}{B} = \frac{4}{15} - \frac{1}{7} = \frac{13}{15 \times 7} \Rightarrow \times$$

・A=8 のとき

$$\frac{1}{B} = \frac{4}{15} - \frac{1}{8} = \frac{17}{15 \times 8} \Rightarrow \times$$

したがって、考えられる(A, B)は、
(4, 60), (5, 15), (6, 10)

(4, 60), (5, 15), (6, 10)



発展例題2 ★★★(応用) <<倍数判定法の応用>>

難関校対策

5けたの整数「861□5」があります。

(1) この整数を4でわると3あまるとき、□にあてはまる数字をすべて答えなさい。

(1)

[解1]

4でわったあまり・・・下2けたを4で割ったあまりと同じ

↓

(□5)を4でわると3あまる数は

4の倍数+3 で2けたの数ですが、
□を探すのには[解2]のほうがはやいでしょう。

[解2]

4の倍数は下2けたが4でわりきれる

↓

$5-3=2$ より、(□2)は4の倍数

□=1, 3, 5, 7, 9

1, 3, 5, 7, 9

(2) この整数を3でわると1あまるとき、□にあてはまる数字をすべて答えなさい。

(2)

3の倍数の見つけ方から解く

3の倍数は[与えられた数の各桁の数の和が3の倍数であれば、その数は3の倍数である。]

↓

$8+6+1+\square+5=\underline{20+\square}$

↓

$20-1=19$ より、

$19+\square$ が3の倍数になるような□を調べます。

□=2 のとき、 $19+1=21\cdots\bigcirc$

□=5 のとき、 $19+5=24\cdots\bigcirc$

□=8 のとき、 $19+8=27\cdots\bigcirc$

以上、□=2, 5, 8

2, 5, 8

わり算のあまりの性質の解説
はテキスト参照

発展例題3 ★★★ (応用) <<積のあまり>>

難関校対策

 $88 \times 88 \times 88 \times 88 \times 88 \times 88 \times 88 \times 88 \times 88 \times 88$ (88を10個かけ合わせた数)

を7でわって商を整数で求めるとき、あまりはいくつになりますか。

$88 \div 7 = 12$ あまり 4 より、 $88 = 7 \times 12 + 4$ とかくことができます。88を7でわるとあまりは4です。

7×12 は7の倍数ですから7Aとあらわすと

$88 \times 88 \times 88 \cdots \times 88 = (7A+4) \times (7A+4) \times (7A+4) \cdots (7A+4)$ となります。

$88 \times 88 = (7A+4) \times (7A+4)$

上の式を分配法則で展開すると、赤矢印は7の倍数ですから7でわり切れ、7でわり切れない部分は $(4 \times 4) = 16$ です。

16をさらに7でわると、2あまり2より、 88×88 を7でわるとあまりは2です。

この結果を $7B+2$ とすると、3つ目の積は下の式のようにになります。

$88 \times 88 \times 88 = (7B+2) \times (7A+4)$

1回目と同様に7の倍数でない部分は $2 \times 4 = 8$ です。

したがって、このときのあまりは、

$8 \div 7 = 1$ あまり 1 $\Rightarrow$ $88 \times 88 \times 88$ を7でわるとあまりは1です。

以上から、次のように考えることができます。

7の倍数部分以外のあまりだけを調べる

88が1つのときの余り4

88が2つのときの余りは $(4 \times 4) \div 7 = 2$ 余り 2

88が3つのときの余りは $(2 \times 4) \div 7 = 1$ 余り 1

88が4つのときの余りは $(1 \times 4) \div 7 = 0$ あまり 4

88が5つのときの余りは $(4 \times 4) \div 7 = 2$ あまり 2

↓

あまりは $\{4, 2, 1\}$ のくり返しになることがわかります。

よって、 $10 \div 3 = 3$ あまり 1 より、

求めるあまりは、4です。

4