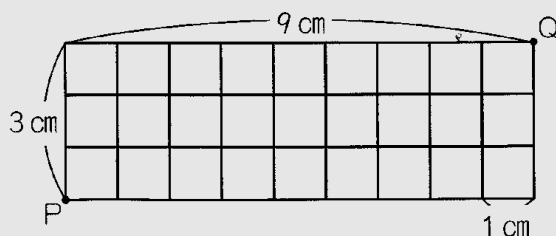


必修例題1 ★☆☆ (基本) <<最短の道順の数を計算で求める>>

右のような、1辺1cmの正方形を並べた図があります。この図の線を通して、PからQまで遠回りせずに行く道順は何通りありますか。


[組み合わせの考え方]

PからQまで最短距離でいくには「上に行くか右方向に行くか」ですから、どこを通過しても $(3+9=)12cm$ になります。

すなわち、

合計 $12cm$ になるような「上方向が $3cm$ になる通り数」を決めればよいことになります。

↓

「 12 の異なるものの中から 3 つを選び出す」ことと同じです。

したがって、組み合わせの公式を使って、

$$\frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220 (\text{通り})$$

220 通り

組み合わせの公式

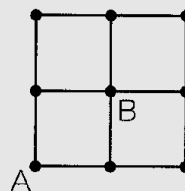
ことなる N 個のものから、

$$2 \text{ 個を選ぶ組み合わせの数} \rightarrow \frac{N \times (N-1)}{2 \times 1}$$

$$3 \text{ 個を選ぶ組み合わせの数} \rightarrow \frac{N \times (N-1) \times (N-2)}{3 \times 2 \times 1}$$

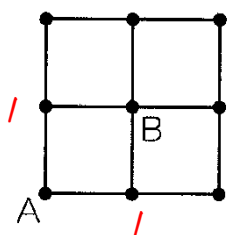
必修例題2 ★☆☆ (標準) 《となりの点へ移動する》

右の図のように、9個の点が直線で結ばれています。点PははじめAにあり、直線を通して1秒ごとにとなりの点に移動します。同じ点を何回通ってもよいことにすると、点PがAを出発してから4秒後にBにあるような移動のしかたは何通りありますか。

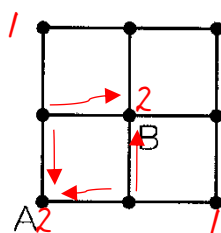


最短距離の問題とは違いますから、このような問題は各交差点に1秒後との道順の数をかき入れて行きます。

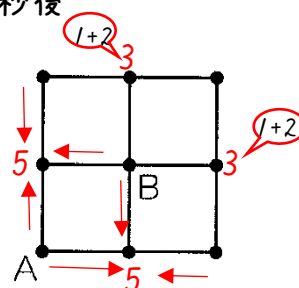
1秒後



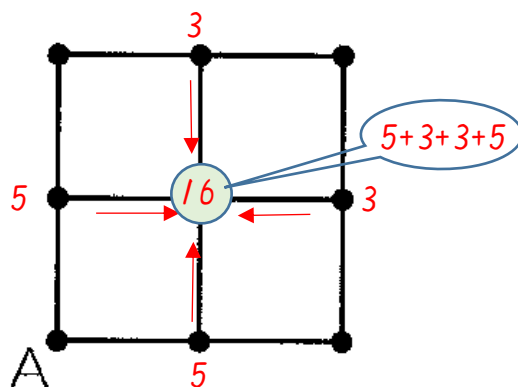
2秒後



3秒後



4秒後 4か所の数字を真ん中に集めます。



4秒後は上の図のようになりますから 全部で、

$$5+3+3+5=16(\text{通り})$$

16通り

発展例題1 ★★★ (応用) <<仕切りの活用>>

難関校対策

12個のミカンがA, B, C, Dの4人で分けます。全員少なくとも1個はもらうものとすると、分け方は何通りありますか。

[組み合わせの計算の公式を工夫して使う]

右の図のように、ミカンを12個並べ、

$(12-1=)$ 11個の間に $(4-1=)$ 3本の

仕切りを入れます。

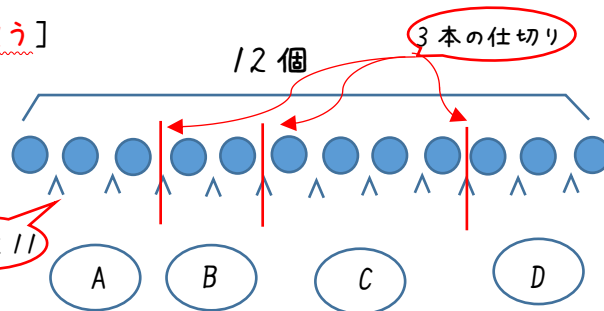
↓

「11個の^の場所から仕切りを入れる3か所を選ぶ」 ことになりますから、

公式を使って、

$$\frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = 165 (\text{通り})$$

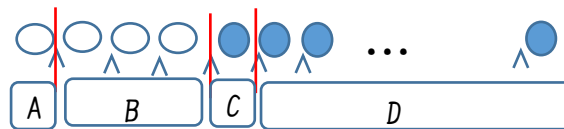
165 通り



[参考] 上の問題で「もらわない人もいる場合」は以下のように考えます。

ミカンの数を4個ふやして $(12+4=)$ 16個として、これを4人で分けます。(下の図)

※増やした4個は実際にはないので0個とします。



右の図は、AとBが0個で、Cが1個、Dが14個もらったときです。

したがって、

上の問題と同じに、間の数は $(16-1=)$ 15, 仕切りの数は3として計算をします。

$$\frac{15 \times 14 \times 13}{3 \times 2 \times 1} = 455 (\text{通り})$$

発展例題2 ★★★ (応用) <<前の結果を次々と利用する①>>

難関校対策

階段をのぼるのに、1歩で1段または2段のぼることにします。たとえば、

2段の階段ののぼり方は、「1段→1段」「2段」の2通り

3段の階段ののぼり方は、「1段→1段→1段」「1段→2段」「2段→1段」の3通り

となります。

(1) 4段の階段ののぼり方は何通りありますか。

(2) 10段の階段ののぼり方は何通りありますか。

(1)

4段目に行くには「2段目」から
と「3段目」からの2通りがありま
す。

↓

・2段目からは 次の1歩で2段
のぼれば4段目に行けます。

2段目までの上り方 2通り

・3段目からは次の1歩で1段
のぼれば4段目に行けます。

3段目までの上り方 3通り

↓

すなわち、4段目までの上り方は
 $2+3=5$ (通り)となります。

5通り

1段 ⇒ 1 1通り

2段 ⇒ $\begin{matrix} 1 & + & 1 \\ 2 \end{matrix}$ 2通り

3段 ⇒ $\begin{matrix} 1 & + & 1 & + & 1 \\ 1 & + & 2 \\ 2 & + & 1 \end{matrix}$ 3通り



(2) このように考えていくと、5段目の上り方は
(3段目ののぼり方)+(4段目ののぼり方)
 $=3+5$
 $=8$ (通り)になります。

(2つ前の数)+(1つ前の数)で作られる規則的な数列を
フィボナッチ数列といいます。

下のような表をつくり前の2数の和を書き込んでいきます。

10段目ののぼり方は

(8段目ののぼり方)+(9段目ののぼり方)
 $=34+55$
 $=89$ (通り)になります。

89通り

段数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
のぼり方	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

発展例題3 ★★★ (応用) <前の結果を次々と利用する②>

難関校対策

A, B, Cの3種類の記号を左から横1列に並べます。ただし、Bの次にAを並べることはできません。たとえば、記号を2個並べる場合、「AA」「AB」「AC」「BB」「BC」「CA」「CB」「CC」の8通りの並べ方があります。

(1) 記号を3個並べる場合、並べ方は何通りありますか。

(2) 記号を6個並べる場合、並べ方は何通りありますか。

[予習シリーズの別解です] 左端の記号に着目して場合分けします。

2個並べる場合、問題文から、

- ① 左端がAの並べ方…AA, AB, ACの3通り
- ② 左端がBの並べ方…BB, BCの2通り
- ③ 左端がCの並べ方…CA, CB, CCの3通りとなります。

(1)

次に 3個並べる場合は、上の①, ②, ③の前にA, B, Cがつきます。

ただし、Bの次にAはないのでBの次は②と③だけになることに注意します。

(ア) 左端がAの並べ方…Aの次は ①, ②, ③のどれがきてもよいので8通り

(イ) 左端がBの並べ方…Bの次は ①はないので5通り

(ウ) 左端がCの並べ方…Cの次は ①, ②, ③のどれがきてもよいので8通り

したがって、求める通り数は $8 + 5 + 8 = 21$ (通り)

21通り

(2) 「Bの次にAはこない!」ことに注意して下のような表をつくります。

表から、

6個の並べ方は 377通り と分かります。

377通り

個数	1	2	3	4	5	6
左端がA	1	3	8	21	55	144
左端がB		2	5	13	34	89
左端がC	1	3	8	21	55	144
合計	3	8	21	55	144	377