例題1

次の整数を素因数分解しなさい。

(1) 10　　(2) 18　　(3) 308

素数は小さい順に 2, 3, 5, 7, 11, 13・・・です。

整数を小さい素数から順に割っていき積の形にすることを「素因数分解する」といいます。

(1)
2 | 10
　 5

最後が素数になったらおわり

2×5

(2)
2 | 18
3 | 9
　 3

$2 \times 3 \times 3$

3からわってもよいが数字は小さい順に並べる

(3)
2 | 308
2 | 154
7 | 77
　 11

$2 \times 2 \times 7 \times 11$

例題2

素因数分解を利用して，次の整数の約数の個数を求めなさい。

(1) 16　　(2) 126

なぜこうなるか?は次ページで詳しく説明します。

次のように 素因数分解をして 約数の個数を知ることができます。

a, b を素数とすると，$a \times a \times b$ の約数の個数は

aが2個，bが1個なので

$(2+1) \times (1+1)$
$= 3 \times 2$
$= 6$ (個)

$a \times a \times a \times b \times b$ の約数の個数は

aが3個　bが2個なので

$(3+1) \times (2+1)$
$= 4 \times 3$
$= 12$ (個)

(1) 16を素因数分解すると，

$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$

2が4個の積ですから上の公式より 約数の個数は，

$(4+1) = 5$ 個　となります。

$\boxed{5\text{個}}$

(2) 126を素因数分解すると，

$126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$

2が1個，3が2個，7が1個ですからから，

上の公式より 約数の個数は，

$(1+1) \times (2+1) \times (1+1) = 2 \times 3 \times 2 = 12$ 個　となります。

$\boxed{12\text{個}}$

素因数分解から約数の個数を知る公式の説明

axaxb の約数は a と b に分けて表をつくると、

1も約数なので右の図のようになります。

（ます目の数が約数の個数です）

（a の個数+1） x （b の個数+1）

（2+1） x （1+1） = 3x2 = 6

	1	a	axa
1			
b			

予習シリーズではココを a が0個, b が0個と解説しています。

(1) 32 = 2x2x2x2x2

1	2	2x2	2x2x2	2x2x2x2	2x2x2x2x2
○	○	○	○	○	○

→ 6個

2が0個のときと考える

(2) 72 = 2x2x2x3x3

	1	2	2x2	2x2x2
1	○	○	○	○
3	○	○	○	○
3x3	○	○	○	○

→ 12個

2が0個, 3が0個のときと考える

(3) 126 = 2x3x3x7

	1	2
1	○	○
3	○	○
3x3	○	○

x

1	7
○	○

→ 6x2=12 個

2が0個, 3が0個, 7が0個と考える

例題3

300の約数のうち，５の倍数は何個ありますか。

解1　約数の個数の公式を使う方法

まず，300を素因数分解します。

300=2x2x3x5x5

2個ある5のうち1つでも5を使えば5の倍数になりますから，

5の倍数の個数とは

5を1個使ったときと2個使ったときの(2, 2, 3)の部分の約数の個数との組み合わせの個数です。

2を使った個数は(2+1)=3通り

3を使った個数は(1+1)=2通り

5を1個使うときと2個使うときの2通りありますから，

求める個数は，

3x2x2=12(個)となります。

12個

解2　原始的な方法です。

かけて300になる組み合わせをかきだします。

1x300　2x150　3x100　4x75　5x60　6x50

10x30　12x25　15x20

この中で5の倍数が含まれる数に印をつけて数えます。

1x300　2x150　3x100　4x75　5x60　6x50

10x30　12x25　15x20

以上12個です。

入学試験の実戦ではこの原始的な方法が役に立つことがあります。

正解すればいいのです。

例題4

(1) 約数の個数が3個である整数を，最も小さい整数から順に3つ答えなさい。

(2) 1以上30以下の整数のうち，約数の個数が4個である整数は何個ありますか。

3x3 や 5x5x5 ・・・などのように，同じ素数の積で表される整数の約数の個数は，

a, b は素数です。

$\underbrace{3 \times 3}_{2個}$ の場合 a x a となるので 約数の個数はどれも (2+1)=3 個

$\underbrace{5 \times 5 \times 5}_{3個}$ の場合も a x a x a となるので 約数の個数はどれも (3+1)=4 個 になります。

さらに，

3x5 のように axb のパターンも (1+1)x(1+1)=4 個になります。

また，

3x3x3x7x7 などのような場合 axaxaxbxb となるので 約数の個数は(3+1)x(2+1)=4x3=12(個)

(1)

約数が3個である整数は axa になるときですから 小さい順に

2x2=4　3x3=9　5x5=25 です。

$\boxed{4,\quad 9,\quad 25}$

※a は素数ですから 1x1 や 4x4 は×です。

(2)

上の公式から

axaxa のパターン

・a=2 のとき 2x2x2=8

・a=3 のとき 3x3x3=27

・a=5 のとき 5x5x5=125・・・×(30 以下の整数より)

axb のパターン

・a=2 b=3 のとき 2x3=6

・a=2 b=5 のとき 2x5=10

・a=2 b=7 のとき 2x7=14

・a=2 b=11 のとき 2x11=22

・a=2 b=13 のとき 2x13=26

・a=3 b=5 のとき 3x5=15

・a=3 b=7 のとき 3x7=21

以上，2+7=9(個)

$\boxed{9個}$

例題5

(1)　整数Aと63の最大公約数は9，最小公倍数は630です。Aを求めなさい。

(2)　2つの整数A，Bがあります。BはAより大きく，AとBの最大公約数は6，最小公倍数は144です。A，Bの組として考えられるものを(A，B)の形ですべて答えなさい。

(1)

まず，下のような連徐法の形をかきます。

最大公約数

$$\begin{array}{r|ll} 9 & A & 63 \\ \hline & a & b \end{array}$$

aとbは互いに素

(これ以上共通の約数をもたない)

9xa=A　・・・ア

9xb=63・・・イ

9xaxb=630・・・ウ

イより　b=(63÷9=)7

これをウの式に代入すると，

9xax7=630　(※アより 9xa=A)なので

Ax7=630

A=630÷7

=90

$\boxed{90}$

(2)

(1)と同様に連除法の形をつくります。

最大公約数

$$\begin{array}{r|ll} 6 & A, & B \\ \hline & a & b \end{array}$$

ここで，

6xa=A

6xb=B

6xaxb=144　最小公倍数

axb=24　6でわる

かけ算して24になる数を探します。

(a)　(b)　a<b

1 × 24 ・・・・・・ O

2 × 12 ・・・・・・ x

3 × 8 ・・・・・・ O

4 × 6 ・・・・ x

上の×印の a=2, b=12 や a=4, b=6 は下のようにさらに2でわれてしまい最大公約数が6でなくなってしまいます。

$$\begin{array}{r|ll} 6 & A, & B \\ \hline 2 & 2, & 12 \\ \hline & 1 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r|ll} 6 & A, & B \\ \hline 2 & 4, & 6 \\ \hline & 2, & 3 \end{array}$$

aとbは互いに素です。

(これ以上共通の約数をもたない)

したがって，

a=1, b=24	a=3, b=8
A=6x1 =6	A=6x3 =18
B=6x24 =144	B=6x8 =48
(6, 144)	(18, 48)

$\boxed{(6, 144)\quad(18, 48)}$

例題6

1より小さい，分母が96の分数を，下のように小さい方から順にならべました。既約分数は何個ありますか。

$\frac{1}{96}, \frac{2}{96}, \frac{3}{96}, \frac{4}{96}, \cdots\cdots, \frac{94}{96}, \frac{95}{96}$

(1)

$\frac{96}{96}$は約分できるので，分子を1～96までとしても既約分数の個数はかわりませんから分子を96までとして考えます。(計算がしやすいから)

分母の96を素因数分解すると，

96=2x2x2x2x2x3 より，

分子が2の倍数か3の倍数のときに約分されます。

・分子の2の倍数の個数は，

96÷2=48・・・より　48個

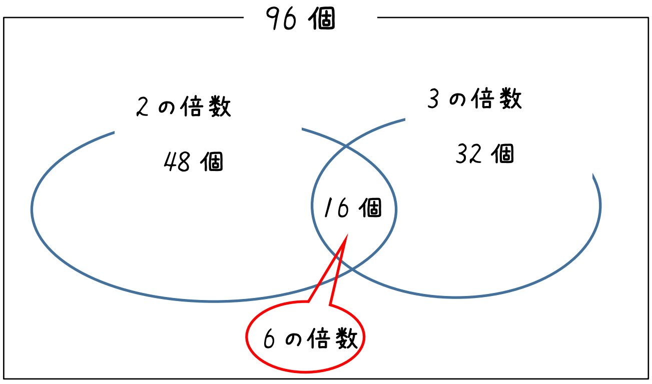
・分子の3の倍数の個数は，

96÷3=32・・・より　32個

・分子の6の倍数の個数は，

96÷6=16・・・より　16個

(2と3の最小公倍数)



・約分できる個数は，

48+32−16=64(個)

ダブっている16個を引きます。

・既約分数の個数は，

96−64=32(個)

$\boxed{32個}$

例題7

次のように，１から順に整数を30までかけた積をＡとします。

Ａ＝１×２×３×４×……×29×30

(1)　Ａを２でわり続けるとき，何回目ではじめて商が整数でなくなりますか。

(2)　Ａは一の位から０が何個連続してならびますか。

(1) 例えば 6は2x3 なので 2で1回わることができます。

これは 6の中に2が1個あるからです。

すると A=1x2x3x・・・の中に 2が何個あるか分かればいいわけです。

2は2が1個ですが，4は2x2で2個，8は2x2x2で3個，16は2が4個あります。

したがって，次のように 2の個数を数えることができます。

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2が1個	2の倍数		o		o		o		o		o		o				
2x2	4の倍数				o				o				o				
2x2x2	8の倍数								o								
2x2x2x2	16の倍数																o

2の倍数の個数・・・30÷2=15　⇒　15個

4の倍数の個数・・・30÷4=7.・・　⇒　7個

8の倍数の個数・・・30÷8=3.・・　⇒　3個

16の倍数の個数・・・30÷16=1.・・　⇒　1個

以上より，2の個数は

15+7+3+1=26(個)

⇒26回割り切れて 27回目に商は整数でなくなります。

$\boxed{\text{27回目}}$

(2)　0が1つできるには 2x5 のセットが1つ必要です。

したがって，このセットが何個あるか調べればよいことになります。

明らかに 2の数より 5の数の方が少ないので 少ない方の5の個数を調べます。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

25=5x5 で5が2個ありますが

25以外は5の個数が1個です。

したがって，全部で 5の個数が7個ですから

0が7個ならびます。

$\boxed{\text{7個}}$