

必修例題 / 約数の個数

次の問いに答えなさい。

(1) 次の①, ②の整数の約数の個数を求めなさい。

① 42 ② 432

(2) 9の約数は{1, 3, 9}の3個です。このように約数を3個もつ整数を小さい順に並べるとき、5番目の数を求めなさい。

(3) 21の約数は{1, 3, 7, 21}の4個です。このように約数を4個もつ整数を小さい順に並べるとき、21は何番目の数ですか。

同じ数を何回かかけるときの表し方とそのよび方 3×3 は 3^2 と表し、3の2乗 とよびます。 $5 \times 5 \times 5$ は 5^3 と表し、5の3乗 $3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$ は $3^2 \times 5^3$ と表します。

覚えてしまおう。

(1) 5年予習シリーズ(上)
第14回の復習 する。① $a \times b = 42$ で a と b は
42の約数です。
$$\left. \begin{array}{l} 1 \times 42 \\ 2 \times 21 \\ 3 \times 14 \\ 6 \times 7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{この8個が} \\ \text{42の約数} \\ \text{です。} \end{array}$$

8個

② ①と同様に かけて
432になる2数を見つ
けてもいいのですが大変
です。素因数分解をして
以下のように求めます。 $a^a \times b^b$ の約数の個数は
 $(a+1) \times (b+1)$ 公式です!

$$\begin{aligned} 432 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \\ &= 2^4 \times 3^3 \end{aligned}$$

→ 約数の個数は
 $(4+1) \times (3+1)$
 $= 20$ (個)

20個

(2) a^2 の約数の個数は
 $2+1=3$ (個) なので、

約数が3個の整数は
 $a \times a$ (a は同じ素因数)の形を
 しています。

したがって、小さい順に

$$\left. \begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 11 \times 11 = 121 \end{array} \right\}$$

より、5番目の数は 121 です。

121

(3) a^3 の約数の個数は
 $3+1=4$ (個)また、異なる素因数
 $a \times b$ の約数の個数は $a^1 \times b^1$ と表すと

$$(1+1) \times (1+1) = 4 \text{ (個)}$$

・ a^3 のとき

$$2 \times 2 \times 2 = 8 \cdots 2$$

$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

・ $a \times b$ のとき

$$2 \times 3 = 6 \cdots 1$$

$$2 \times 5 = 10 \cdots 3$$

$$2 \times 7 = 14 \cdots 4$$

$$3 \times 5 = 15 \cdots 5$$

$$3 \times 7 = 21 \cdots 6 \text{ 番目}$$

6番目

必修例題2 割り算とあまり①

次の問いに答えなさい。

- 3で割ると2あまり、5で割ると1あまる整数のうち、最も小さい3けたの整数を求めなさい。
- ある3けたの整数があります。その整数に5を加えた数は3の倍数となり、また、その整数に3を加えた数は5の倍数となります。このような3けたの整数で最も小さい数を求めなさい。
- 2けたの整数を12で割ると、商とあまりが同じ数になりました。このような2けたの数で、最も大きい数を求めなさい。

(1)

$$\begin{array}{l} A \cdots 2 \\ 3 \overline{) \square} \rightarrow \square = 3 \times A + 2 \\ B \cdots 1 \\ 5 \overline{) \square} \rightarrow \square = 5 \times B + 1 \end{array}$$

3の倍数
5の倍数

・A, B に 0 から数字を代入すると、

$$\begin{array}{ll} 3 \times 0 + 2 = 2 & 5 \times 0 + 1 = 1 \\ 3 \times 1 + 2 = 5 & 5 \times 1 + 1 = 6 \\ 3 \times 2 + 2 = 8 & 5 \times 2 + 1 = 11 \\ 3 \times 3 + 2 = 11 & \end{array}$$

このような整数で最も小さい数は11で
その後是最小公倍数の15飛んで出現
します。

$$\begin{array}{r} 11 \quad 26 \quad 41 \cdots \\ \hline 15 \quad 15 \quad 15 \cdots \end{array}$$

11 + 15の倍数です。

$$\begin{array}{l} 15 \times 6 = 90 \\ 11 + 90 = 101 \end{array}$$

3けたの
最小

$$\boxed{101}$$

(2)

その整数をXとすると、

- X + 5 は3の倍数で、これに3を加えても3の倍数のままなので、
 $X + 5 + 3$ は3の倍数 ... ア
- X + 3 は5の倍数で、これに5を加えても5の倍数のままなので、
 $X + 3 + 5$ は5の倍数 ... イ

アとイより $(X + 8)$ は3の倍数であり、
5の倍数でもあるので15の倍数になります。

$$\downarrow$$

$$X + 8 = 15 \text{ の倍数}$$

$$\downarrow$$

$$X = 15 \text{ の倍数} - 8 \text{ で3けたの整数}$$

$$15 \times 7 - 8 = 97 \cdots X$$

$$15 \times 8 - 8 = 112 \cdots O$$

$$\boxed{112}$$

(3) 2けたの整数を□、商とあまりをAとすると、

$$12 \overline{) \square} \rightarrow \square = 12 \times A + A$$

重要です。

$$\begin{array}{l} A \text{ は } 12 \text{ より} \\ \text{小さい数} \\ A < 12 \end{array}$$

2けたの最大は99なので、このような数で99以下の数を探します。

$$12 \times 8 + 8 = 104 \cdots X$$

$$12 \times 7 + 7 = 91 \cdots O$$

$$\boxed{91}$$

必修例題3 割り算とあまり②

- (1) ある数で 53 を割ると 5 あまり、80 を割ると 8 あまる整数は何個ありますか。
- (2) 61, 97, 151 の 3 つの数を、同じ数でそれぞれ割ったとき、割り切れず、あまりは等しくなりました。割った数として考えられる最大のものを求めなさい。
- (3) 99 を 98 で割ると商とあまりがともに 1 になります。このように、99 を整数 a で割ると、商とあまりが同じ b になるような (a, b) の組み合わせを、 $(98, 1)$ 以外にすべて求めなさい。

(1) 「ある数で」という言葉が省かれています。

$$\begin{array}{r} \dots 5 \\ \square \overline{) 53} \\ \underline{53} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} \dots 8 \\ \square \overline{) 80} \\ \underline{80} \\ 0 \end{array}$$

でわりと でわりと

$53 - 5 = 48$ $80 - 8 = 72$

48 と 72 なら $\square$ でわり切れる
↓
 $\square$ は 48 と 72 の公約数で
あまりの 8 より大きい数です。

48 と 72 の最大公約数は
24 なので、その約数は

$$\begin{array}{l} 1 \times 24 \\ 2 \times 12 \\ 3 \times 8 \\ 4 \times 6 \\ 6 \times 4 \\ 8 \times 3 \\ 12 \times 2 \\ 24 \times 1 \end{array}$$

8 より大きい数は 12 と 24 の
2 個です。

2 個

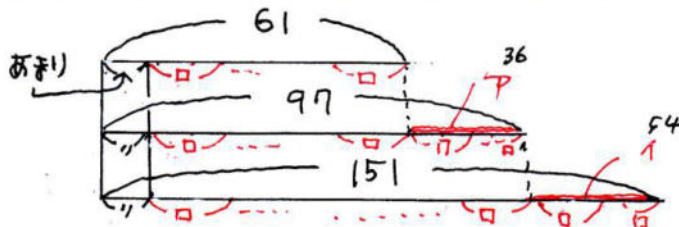
$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 48, 72} \\ 2 \overline{) 24, 36} \\ 2 \overline{) 12, 18} \\ 3 \overline{) 6, 9} \\ 2 \overline{) 3} \end{array}$$

最大公約数の
約数が 2 数の
公約数になり
ます。

(2)

共通のあまり部分を左はしにそろえて書きます。

あまりを除いた部分は「ある数で $\square$ 」でわり切れますから図の ア , イ の部分も「ある数で $\square$ 」でわり切れます。



ア の長さ $\dots 61 - 1 = 60$

イ の長さ $\dots 151 - 1 = 150$

$\square$ は 60 と 150 の公約数です。

「その最大」のものを求めますから

60 と 150 の最大公約数です。

$2 \times 3 \times 3 = 18 \dots \square$ の最大

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 60, 150} \\ 2 \overline{) 30, 75} \\ 3 \overline{) 10, 25} \\ 5 \overline{) 2, 5} \end{array}$$

18

(3)

$$\begin{array}{r} b \dots b \\ a \overline{) 99} \\ \downarrow \\ 99 = a \times b + b \quad (a > b) \end{array}$$

$b \times (a+1) = 99$

$b \times (a+1) = 99$

2 数をかけて 99 に
なるので、

b と $(a+1)$ は 99 の
約数です。

重要!

$$\begin{array}{l} 1 \times 99 \\ 3 \times 33 \\ 9 \times 11 \\ \downarrow \\ (a, b) = (98, 1) \text{ 例} \\ (32, 3) \\ (10, 9) \end{array}$$

$(32, 3), (10, 9)$

必修例題4 最大公約数と最小公倍数

次の問いに答えなさい。

- (1) 2つの整数84とAがあります。この2つの整数の最大公約数は14で、最小公倍数は420です。このとき、整数Aはいくつですか。
- (2) 2つの整数A、Bがあります。AとBの最大公約数は6、最小公倍数は576です。AはBより大きいものとして、考えられる整数Aをすべて求めなさい。
- (3) 2つの整数20、Aの最小公倍数が180のとき、考えられるAをすべて求めなさい。

(1) $14 \overline{) 84 \quad A}$ $\Delta = 84 \div 14 = 6$

$\Delta \quad a$

$14 \times \Delta = 84$

$14 \times a = A$

$14 \times \Delta \times a = 420$

$14 \times 6 \times a = 420$

$84 \times a = 420$

$a = 420 \div 84 = 5$

$A = 14 \times a$ なので

$A = 14 \times 5 = 70$

70

(2) $6 \overline{) A \quad B}$ とすると、

$A = 6 \times a$

$B = 6 \times b$ $A > B$

a b

a と b は互いに素

$6 \times a \times b = 576 \rightarrow a \times b = 96$

6でわった。

aとbは96の約数なので、2つの積を分解すると

$1 \times 96 \dots 0$	$4 \times 24 \dots \times$
$2 \times 48 \dots \times$	$6 \times 16 \dots \times$
$3 \times 32 \dots 0$	$8 \times 12 \dots \times$

この中で互いに素になっているのは 0以外の

1×96 と 3×32 です。

$A > B$ ですから a は 32 と 96 が考えられます。

したがって、

$A = 6 \times 32 = 192$

$A = 6 \times 96 = 576$

192, 576

(3) 最大公約数をGとすると、

$G \overline{) 20 \quad A} \rightarrow G \times \Delta = 20$

$\Delta \quad a$ $G \times a = A$

$G \times \Delta \times a = 180$

代入する

$20 \times a = 180 \rightarrow a = 9$

$G \overline{) 20 \quad A}$

$\Delta \quad 9$

$G \times 9 = A$

Δ は 20の約数で、 Δ と 9は互いに素なので

Δ は 1, 2, 4, 5, 10, 20 が考えられます。

$G \times \Delta = 20$ より

$\Delta = 1$ のとき $G = 20$ $A = 20 \times 9 = 180$

$\Delta = 2$ のとき $G = 10$ $A = 10 \times 9 = 90$

$\Delta = 4$ のとき $G = 5$ $A = 5 \times 9 = 45$

$\Delta = 5$ のとき $G = 4$ $A = 4 \times 9 = 36$

$\Delta = 10$ のとき $G = 2$ $A = 2 \times 9 = 18$

$\Delta = 20$ のとき $G = 1$ $A = 1 \times 9 = 9$

9, 18, 36, 45, 90, 180

必修例題5 素因数分解の応用①

$1 \times 2 \times 3 \times \dots \times N$ と、1からある整数Nまで順にかけた積をAとします。

- (1) ある整数Nまでかけたところ、Aは156で割り切れました。Nとして考えられる整数のうちで一番小さな整数を求めなさい。
- (2) $N = 30$ のとき、Aを3で割り続けると、何回目で商が整数でなくなりますか。 注意!
- (3) (2)のとき、Aは一の位から連続して何個の0が並んでいますか。

(1) $\frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times N}{156}$ の分母が
約分されて1になる。

分母の156を素因数分解
すると

$$\begin{array}{r} 2 \overline{)156} \\ 2 \overline{)78} \\ 3 \overline{)39} \\ 13 \end{array}$$

この13が約分されるには
分子に13がなければならな
いのので13までかけたとき
になります。 $\downarrow$
 $N = 13$

13

$$\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13}{2 \times 2 \times 3 \times 13}$$

3の個数は(3)のように数えあげて
できます。

$$\begin{array}{cccccccc} 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & 21 & 24 & 27 & 30 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ & & \underline{3 \times 3} & & & \underline{3 \times 3 \times 2} & & & \underline{3 \times 3 \times 3} & \end{array}$$

(2) $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 30$ の中に
3が何個あるかを調べます。

まず3を1個はもっている数字
3の倍数の個数

$$30 \div 3 = 10 \text{ (個)} \dots \text{ア}$$

3を2個はもっている数字
(例えば $3 \times 3 = 9$)

9の倍数の個数

$$30 \div 9 = 3 \dots \text{より 3個} \dots \text{イ}$$

3を3個はもっている数字
(例えば $3 \times 3 \times 3 = 27$)

27の倍数の個数

$$30 \div 27 = 1 \dots \text{より 1個} \dots \text{ウ}$$

アイウより3の個数は
 $10 + 3 + 1 = 14 \text{ (個)}$

何回目で商が整数でなくなるか
と問われているので

$$14 + 1 = 15 \text{ (回目)}$$

15回目

(3) 0が1つできるには 2×5 のセット
が1個必要です。

$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times 30$
の中に明らかに2の個数の方
が多いので5の個数を調べ
ればよい。

$$\begin{array}{ll} 5 & \dots 1 \text{ 個} \\ 10 & \dots 1 \text{ 個} \\ 15 & \dots 1 \text{ 個} \\ 20 & \dots 1 \text{ 個} \\ 25 & \dots 2 \text{ 個} (5 \times 5 \text{ より}) \\ 30 & \dots 1 \text{ 個} \end{array}$$

5の個数は7個より

2×5 のセットが7個できると
0が7個並びます。

7個

計算2の個数を出すには
5の倍数の個数

$$30 \div 5 = 6 \text{ (個)} \dots \text{ア}$$

$5 \times 5 = 25$ の倍数の個数は

$$30 \div 25 = 1 \dots \text{より 1個} \dots \text{イ}$$

ア+イより7個になります。

必修例題6 素因数分解の応用②

表には1から50までの整数を書き、裏には何も書かれていないカード50枚を下のように並べました。

1 2 3 4 5 6 ... 49 50

はじめに、左から2枚ごとにカードを裏返すと、下ようになります。

1 □ 3 □ 5 □ ... 49 □

続いて左から3枚ごと、4枚ごと、5枚ごと、……、50枚ごとにカードを裏返しました。

(1) 3回裏返されたカードは、全部で何枚ありますか。

(2) 表面が上になっているカードは、全部で何枚ありますか。

(1) 3回だけ裏返された。

↓
カードに書かれた数字の約数の個数が4個のものを調べます。

1は裏返しにできないから!

a, b を素数とし、
 $a \times a$ を a^2 (a の2乗) のように表すと、
約数の個数は

$a \times a \sim a^2 \rightarrow 2+1=3$ 個 ... P

$a \times a \times a \sim a^3 \rightarrow 3+1=4$ 個 ... I

$a \times b = a' \times b'$
 $= (1+1) \times (1+1)$
 $= 2 \times 2 = 4$ 個 ... U

ここでは、4個の約数ですから 1とU の場合です。

I の ... $2 \times 2 \times 2$
 $3 \times 3 \times 3$) の 2個

U の形 ... $(2 \times 3), (2 \times 5), (2 \times 7), (2 \times 11), (2 \times 13), (2 \times 17), (2 \times 19), (2 \times 23),$
 $(3 \times 5), (3 \times 7), (3 \times 11), (3 \times 13), (5 \times 7)$ の 13個 全部で $(2+13)=15$ 個 (枚)

(2) 1回目で裏、2回目で表、3回目で裏 ... となり、
表になるのは、偶数回裏返された。

↓
1を除く約数が偶数個

↓
計算上では1を加えるので、約数の個数が奇数個の整数を調べます。

P の形以外で、 $a^4 = a \times a \times a \times a$ のときも
約数は奇数個になります。

(例: $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 \rightarrow$ $\begin{matrix} 1 \times 16 \\ 2 \times 8 \\ 4 \times 4 \end{matrix}$ 約数は5個)

全ての平方数の約数の個数は奇数個

したがって、このような数は1~50までに、

$(1 \times 1=1), (2 \times 2=4), (3 \times 3=9), (4 \times 4=16),$
 $(5 \times 5=25), (6 \times 6=36), (7 \times 7=49)$ の 7個 (枚)

15枚