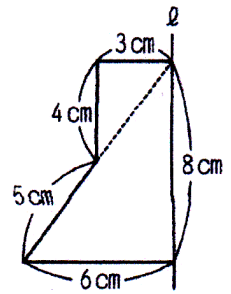


必修例題 1

複合立体の求積

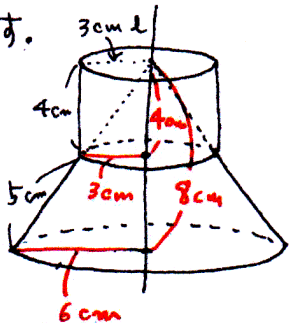
右の図は、長方形と台形を組み合わせた図形です。この図形を、直線ℓを軸にして1回転させたときにできる立体について、次の問いに答えなさい。ただし、円周率は3.14とします。

- (1) この立体の体積は何 cm^3 ですか。
- (2) この立体の表面積は何 cm^2 ですか。



(1)

この図形を回転させてできる立体は下の図のように円柱と円すい台を合わせた立体になります。



- ・ 円柱部分の体積は

$$3 \times 3 \times 3.14 \times 4 = 36 \times 3.14 \text{ (cm}^3\text{)}$$

- ・ 円すい台の体積は 大きい円すいから、小さい円すいを引いたものです。

$$\begin{aligned} & 6 \times 6 \times 3.14 \times 8 \times \frac{1}{3} - 3 \times 3 \times 3.14 \times 4 \times \frac{1}{3} \\ &= (288 - 36) \times \frac{1}{3} \times 3.14 \\ &= 84 \times 3.14 \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

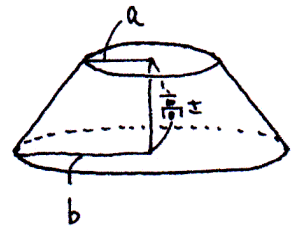
- ・ したがって求める体積は

$$\begin{aligned} & 36 \times 3.14 + 84 \times 3.14 \\ &= (36 + 84) \times 3.14 \\ &= 120 \times 3.14 \\ &= 376.8 \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

$$376.8 \text{ cm}^3$$

※あくまでも参考までに！ 公式です

底面の半径をそれぞれ a 、 b とします。

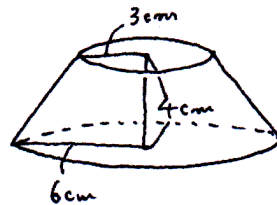


円すい台の体積は

$$(a \times a + a \times b + b \times b) \times 3.14 \times \text{高さ} \times \frac{1}{3}$$

上の公式を利用して (1) の円すい台を計算すると

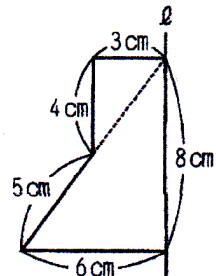
$$\begin{aligned} & (3 \times 3 + 3 \times 6 + 6 \times 6) \times 3.14 \times 4 \times \frac{1}{3} \\ &= 63 \times 4 \times \frac{1}{3} \times 3.14 \\ &= 84 \times 3.14 \text{ (cm}^3\text{)} \text{ となります。} \end{aligned}$$



覚えるなら徹底的に、そうでない場合は、無理して覚える必要はありません。

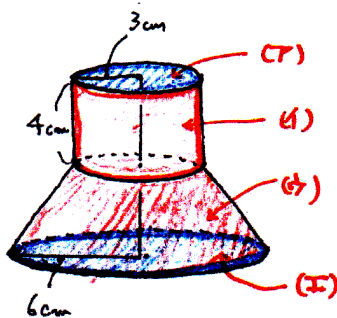
必修例題1 複合立体の求積

右の図は、長方形と台形を組み合わせた図形です。この図形を、直線ℓを軸にして1回転させたときにできる立体について、次の問いに答えなさい。ただし、円周率は3.14とします。



- (1) この立体の体積は何cm³ですか。
- (2) この立体の表面積は何cm²ですか。

(2)



上の図のように、(ア)、(イ)、(ウ)、(エ)の4つの部分に分けて計算します。

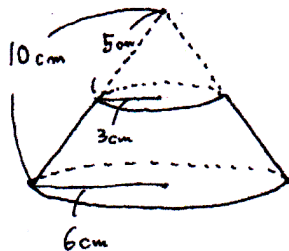
(ア) ... $3 \times 3 \times 3.14 = 9 \times 3.14 \text{ (cm}^2\text{)}$

(イ) ... $\text{円周の長さ} \times \text{高さ}$
 $3 \times 2 \times 3.14 = 6 \times 3.14 \text{ (cm)}$

$6 \times 3.14 \times 4 = 24 \times 3.14 \text{ (cm}^2\text{)}$

(ウ) ...

大きい円すいの側面積から小さい円すいの側面積を引きます。



・ 大きい円すいの側面積は

$$6 \times 10 \times 3.14 = 60 \times 3.14$$

・ 小さい円すいの側面積は

$$3 \times 5 \times 3.14 = 15 \times 3.14$$

これより(ウ)の部分の面積は

$$\begin{aligned} 60 \times 3.14 - 15 \times 3.14 \\ = (60 - 15) \times 3.14 \\ = 45 \times 3.14 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

(エ) ... $6 \times 6 \times 3.14 = 36 \times 3.14 \text{ (cm}^2\text{)}$

したがって求める表面積は

$$\begin{aligned} (9 + 24 + 45 + 36) \times 3.14 \\ = 114 \times 3.14 \\ = 357.96 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

$$357.96 \text{ cm}^2$$

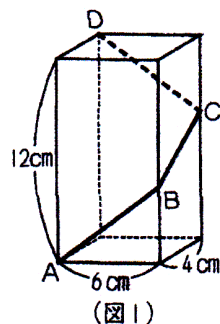
円すいの表面積の公式

底面の半径 × 母線 × 3.14
 は ん ぼ さ ん

必修例題 2 展開図の応用(立体表面上の最短距離)

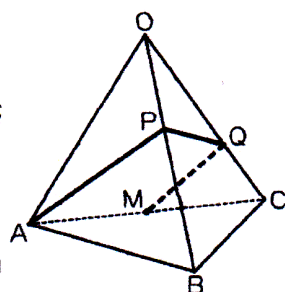
次の問いに答えなさい。

- (1) (図1) のような直方体があります。この直方体の底面の1つの頂点Aから、上の面の頂点Dまで糸をピンと張りました。Cの高さは何cmですか。



(図1)

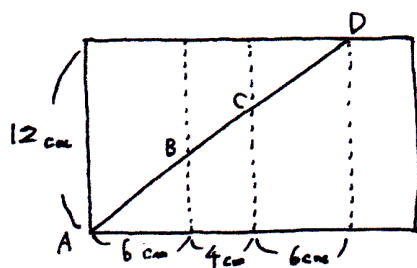
- (2) (図2) のような1辺の長さが10cmの正四面体O-ABCがあります。辺ACのまん中の点をMとし、辺OB、OC上にそれぞれ点P、Qをとります。



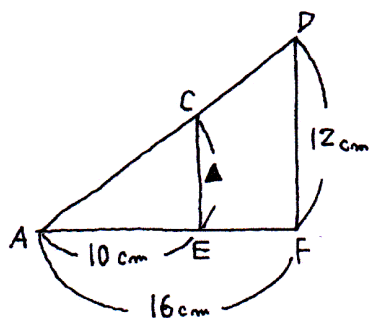
(図2)

直線AP、PQ、QMの長さの和が最小になるとき、AP:PQ:QMの比を求めなさい。

- (1) 直方体を展開したときに、AとDを結んだ直線が最短距離です。



ここで三角形の相似を利用してCの高さを求めます。



左下の図で三角形ACEと三角形ADFの相似比は

$$10\text{cm} : 16\text{cm} = 5 : 8$$

$$\Delta : 12 = 5 : 8 \text{ より}$$

$$\Delta \times 8 = 12 \times 5$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 12 \times 5 \div 8 \\ &= 7.5 (\text{cm}) \end{aligned}$$

7.5 cm

- (★) $CE : DF = 5 : 8$ のとき CE は DF の $\frac{5}{8}$ なのぞ $CE = 12 \times \frac{5}{8} = 7.5 (\text{cm})$

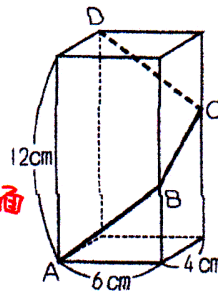
これは $CE : DF = 5 : 8 = \frac{5}{8} : 1$ ぞ

DF を 1 としたとき CE は $\frac{5}{8}$ になるからぞ。

必修例題2 展開図の応用(立体表面上の最短距離)

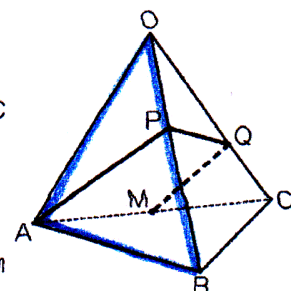
次の問いに答えなさい。

- (1) (図1) のような直方体があります。この直方体の底面の1つの頂点Aから、上の面の頂点Dまで糸をピンと張りました。Cの高さは何cmですか。



(図1)

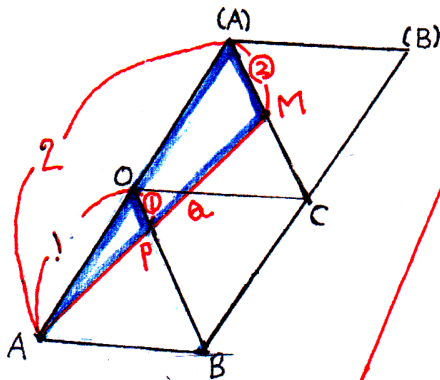
- (2) (図2) のような1辺の長さが10cmの正四面体O-ABCがあります。辺ACのまん中の点をMとし、辺OB, OC上にそれぞれ点P, Qをとります。



(図2)

直線AP, PQ, QMの長さの和が最小になるとき、AP:PQ:QMの比を求めなさい。

(2)



展開図の書き方はいろいろありますが、ここでは 三角形OABを元にして、OB, OC, ACに面をくっつけていきます。

ACのまん中にMをとり、AとMを結ぶ。直線がOB, OCと交わる点が必要なP, Qです。

このとき、AP + PQ + QMが最小になります。
(最短距離)

まず、上の青色部分において、

三角形AOPとA(A)Mは1:2の相似形なので

$$OP:(A)M = 1:2$$

Mは(A)Cの中点なので

(AM)の長さは5cm

②が5cmなので

①は2.5cm

... OPの長さ

次に、三角形OQPと三角形CQMに着目します。

2つの三角形はクロス型の相似形なので、

$$OP = 2.5 \text{ cm}$$

$$CM = 5 \text{ cm}$$

なので

$$OP:CM = 2.5:5 = 1:2$$

$$PQ:QM = 1:2$$

次に、三角形OQPと三角形BAPに着目します。

2つの三角形はクロス型の相似形です。

$$OP = 2.5 \text{ cm}$$

$$PB = 10 - 2.5$$

$$= 7.5 \text{ cm}$$

$$OP:PB = 2.5:7.5 = 1:3$$

$$PQ:AP = 1:3$$

$$AP:PQ:QM$$

$$3:1:2$$

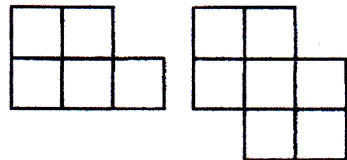
$$3:1:2$$

$$3:1:2$$

必修例題 3 投影図の応用

右の図は、1辺が1cmの立方体を積み重ねてできた立体を、正面から見た図と真上から見た図を表しています。

正面から見た図 真上から見た図

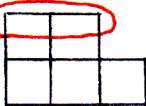


- (1) この立体に使われている立方体の個数は、何個以上何個以下と考えられますか。
- (2) 立方体が最も多く使われた立体の表面積は何 cm^2 ですか。
- (3) 立方体が最も多く使われた立体の表面全体を赤くぬったあと、もとの立方体にもどしました。このとき、3つの面だけが赤くぬられている立方体は何個ありますか。

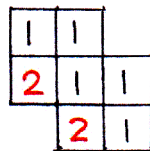
(1) 最も少ないときは

コノ2つボ'どこカ1ヶ所'にあれば'よい。

ま'上'から見た図に'個数'を書き入れていきます。



正面から見た図

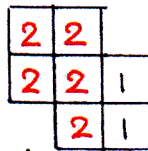
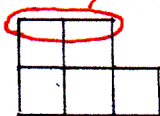


↑ ↑ ↑
2 2 1
(正面から見える数)

この場合 $2 \times 2 + 1 \times 5 = 9$ (個)

最も多いとき

全ての場所'に'コノ2つを'置けば'よい



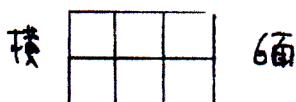
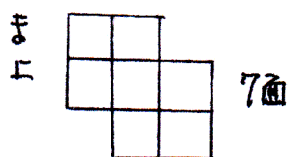
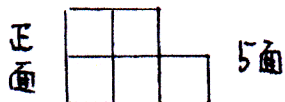
↑ ↑ ↑
2 2 1
(正面から見える数)

この場合 $2 \times 5 + 1 \times 2 = 12$ (個)

以上より9個以上12個以下となります。

9個以上12個以下

(2)



両面それぞれありますから、

$$2 \times (5 + 7 + 6) = 36 \text{ (面)}$$

1面の面積は

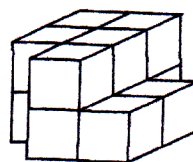
$$1 \times 1 = 1 \text{ (cm}^2\text{)} \text{ より}$$

$$1 \times 36 = 36 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$36 \text{ cm}^2$$

(3)

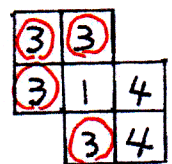
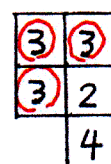
(見取り図)



各段ごとに、赤くぬられている面の数を調べます。

(上の段)

(下の段)



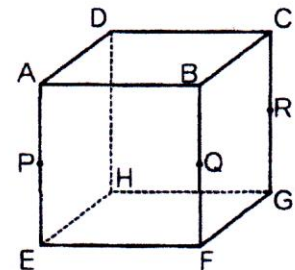
全部で7個です。

7個

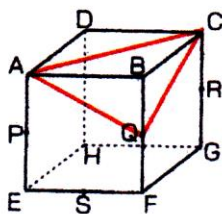
必修例題 4 立方体の切断①

右の図は立方体で、P、Q、Rは、それぞれ辺の真ん中の点です。次の3点を通る平面で、この立方体を切るとき、その切り口の形を答えなさい。

- (1) 3点(A, C, Q) (2) 3点(A, D, R)
(3) 3点(C, F, P)



- (1) 3点 A, C, Q

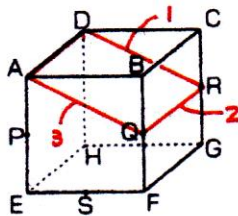


同じ平面上にあれば線で結ぶことができます。

AとC、AとQ、CとQは同じ平面上にありますから左図のようになります。

↓
三角形 (AQ=CQ なので 二等辺三角形)

- (2) 3点 A, D, R



DとRは同じ平面上にありますから線で結びます。

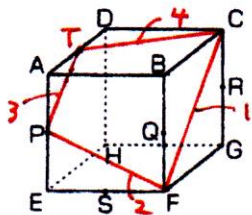
次に RからADに平行な線を引きます。(RQ)

次に QとAは同じ平面上ですから線で結べます。

↓
角A、角Dは直角ですから 長方形 になります。

★ 1→3→2の順でもよい。

- (3) 3点 C, F, P



CとF、FPは同じ平面ですから線で結びます。

次に PからFCに平行な線を引きます。

辺ADとの交点をTとすると、BF=BCより

$$AP=AT$$

次に TとCを結びます。

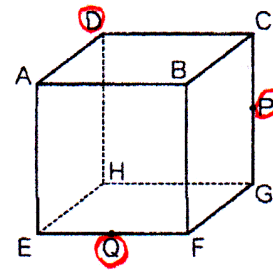
↓
PTとFCは平行ですから 台形 (PF=TCより 等脚台形)

- (1) 三角形(二等辺三角形) (2) 長方形 (3) 台形(等脚台形)

必修例題 5 立方体の切断②

1 辺が 6 cm の立方体 ABCD-EFGH があります。点 P、Q は、それぞれ辺の真ん中の点です。この立方体を、3 つの点 D、P、Q を通る平面で、2 つの立体に切り分けました。

- (1) 切り口の平面が辺 AE と交わる点を R とするとき、ER の長さは何 cm ですか。
- (2) 切り口の平面が辺 FG と交わる点を S とするとき、FS の長さは何 cm ですか。

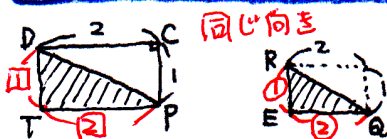


- (1) 同じ平面上の点と点は結ぶますから、
まず、D と P を結ぶます。

次に、Q から DP に平行な線 RQ を 引きます。

このとき、

$DC : CP = 2 : 1$ なので、 $RE : EQ = 1 : 2$ になるように R を決め、D と R を結ぶます。



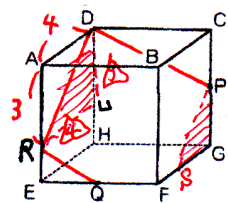
Q は EF の真ん中の点 (中点) なので
 $EQ = 3 \text{ (cm)}$

したがって、ER の長さは

$$3 \div 2 = 1.5 \text{ (cm)}$$

1.5 cm

- (2)
D と R を結ぶます。
次に、P から DR に
平行な線 PS を引き
ます。

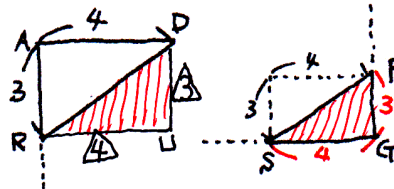


このとき、下の図で、

$DA : AR = 6 \text{ cm} : (6 - 1.5) \text{ cm} = 4 : 3$ なので、

$$DU : UR = 3 : 4$$

$PG : GS = 3 : 4$ になるように S を決めます。



P は CG の真ん中の点 なので

$$PG = 3 \text{ (cm)}$$

$$GS = 4 \text{ (cm)}$$

↓

したがって、FS の長さは

$$6 - 4 = 2 \text{ (cm)}$$

2 cm

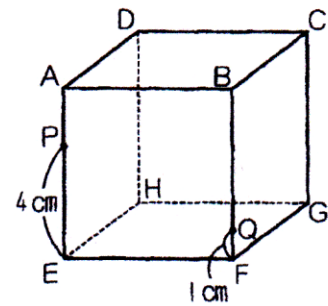
ステップアップ

立方体の切断③

その 8

1 辺が 6 cm の立方体 ABCD-EFGH があります。点 P は辺 AE 上の E から 4 cm のところに、点 Q は辺 BF 上の F から 1 cm のところにあります。

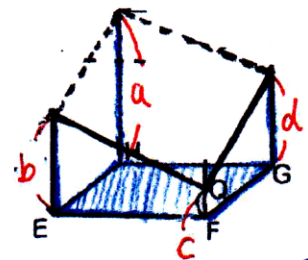
- (1) この立方体を、3 点 D, P, Q を通る平面で 2 つに切り分けたとき、点 E をふくむ方の立体の体積を求めなさい。
- (2) この立方体を、3 点 P, F, C を通る平面で 2 つに切り分けたとき、点 A をふくむ方の立体の体積を求めなさい。



右の図で、氷をイメージすると溶けて水になったとき 水面は水平 になります。

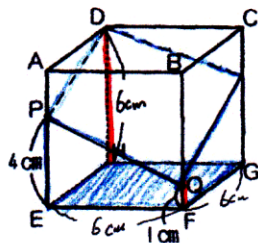
このとき、 $a+c = b+d$ なので

水面の高さは平均の $\frac{a+c}{2}$ または $\frac{b+d}{2}$ となります。



(1) E を含む立体の体積は

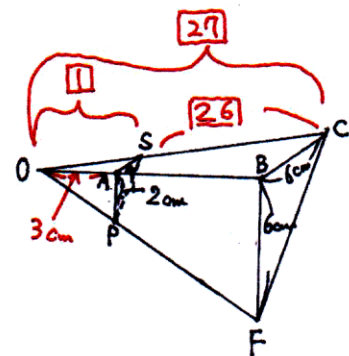
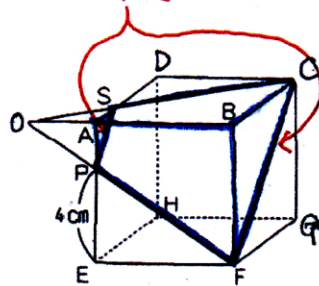
「底面積×高さ」より、



$$6 \times 6 \times \frac{6+1}{2} = 126 \text{ cm}^3$$

$$126 \text{ cm}^3$$

(2) 平行



求める立体は上の図の青枠部分で、
大きな三角錐から小さな三角錐を引いたものです。

$$AP=AS=(6-4)=2 \text{ cm} \quad BF=BC=6 \text{ cm} \text{ より、}$$

$$OA:OB=AP:BF=2 \text{ cm}:6 \text{ cm}=1:3$$

$$OA:AB=1:(3-1)=1:2$$

$$OA \text{ の長さは } 6 \text{ cm} \times \frac{1}{2} = 3 \text{ cm}$$

また、

小さな三角錐と大きな三角錐の体積比は

$$(1 \times 1 \times 1) : (3 \times 3 \times 3) = 1 : 27 \text{ なので、}$$

求める青枠部分の体積比は

$$(27-1)=26 \rightarrow \text{小さい三角錐の 26 倍}$$

よって、

$$2 \times 2 \div 2 \times 3 \times \frac{1}{3} \times 26 = 52 \text{ cm}^3$$

$$52 \text{ cm}^3$$