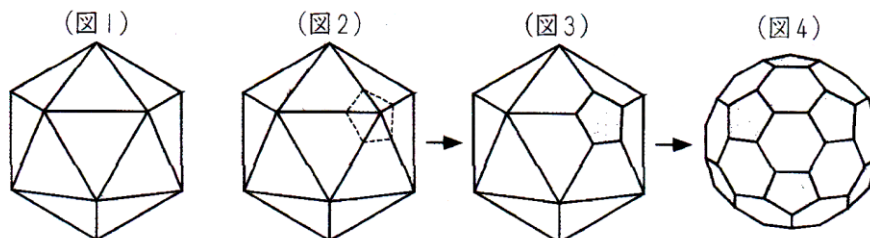


必修例題 1

立体の構成①

(図 1) のような、合同な 20 個の正三角形 で囲まれた立体があります。



- (1) (図 1) の立体にある 頂点、辺の数 はそれぞれいくつですか。
- (2) (図 1) の立体のすべての頂点を平面で切り取り、正五角形の断面 を作ります。(図 2) ~ (図 4) はそのようすを表しています。(図 4) の立体にある 頂点、辺の数 はそれぞれいくつですか。

(考え方)

(1) 頂点の数

正三角形には 頂点が 3 つある。

それが 20 個ある。

もし、バラバラなら頂点の総数は $3 \times 20 = 60$ 個
 になる。しかし、1 つの頂点に 5 つが重なっている
 ので $60 \div 5 = 12$ 個

頂点: 12

辺の数

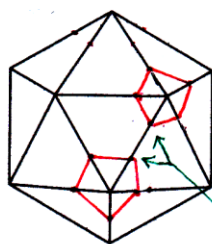
正三角形には 辺が 3 つある。

それが 20 個ある。

もし、バラバラなら頂点の総数は $3 \times 20 = 60$ 個
 になる。しかし、1 つの頂点に 2 つが重なっている
 ので $60 \div 2 = 30$

辺: 30

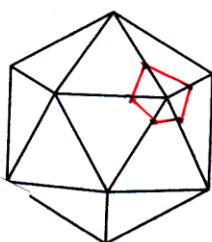
(2)

頂点の数

1 つの頂点をカットすると、
 5 つの頂点ができていくので

$$5 \times 12 = 60$$

はなれている
 (重なっていない)

辺の数

1 つの頂点をカットすると、
 5 本の辺ができていくので

$$5 \times 12 + 30 = 90$$

(1) より

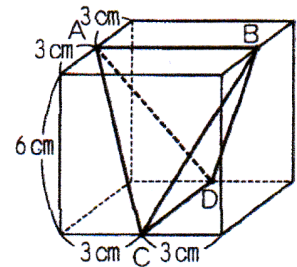
頂点: 60

辺 90

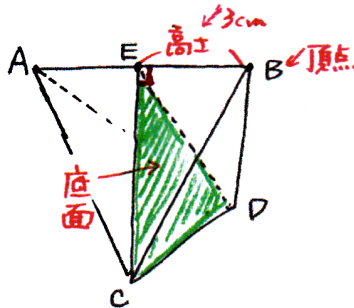
必修例題 2

立体の構成②

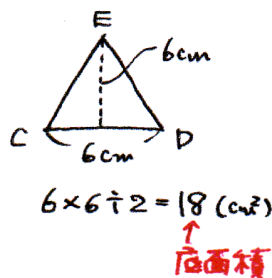
右の図は、1辺が6cmの立方体の4つの辺の中点A、B、C、Dを結んで作った立体です。この立体の体積は何 cm^3 ですか。



ABの真ん中の点をEとして、下の図のように **ECD** を底面、**EB** を高さ、**B** を頂点とする **三角形すい**を考えます。



まず底面積。
正面からみると



EはABのまん中の点なので
高さBEは3cmです。

三角形の体積 = 底面積 × 高さ × $\frac{1}{3}$

この三角形が左側にもあるので
2倍します。

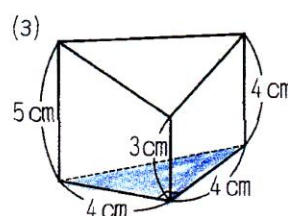
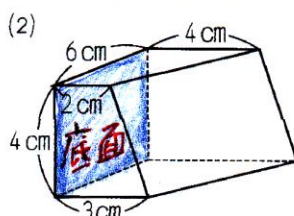
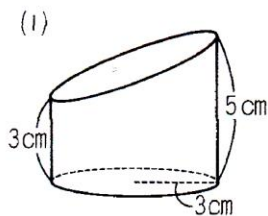
求める体積は

$$18 \times 3 \times \frac{1}{3} \times 2 = 36 (\text{cm}^3)$$

36 cm^3

必修例題3 立体の構成③

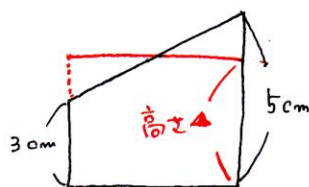
下の図の立体は、それぞれ円柱、直方体、三角柱を1つの平面で切って2つに分けた立体を表しています。それぞれの立体の体積を求めなさい。



それぞれの立体を氷と考えます。

氷がとけて水になると水面は平らになり高さは平均になります。

(1)



水面の高さは平均になりますから、 $(3+5) \div 2 = 4 \text{ cm}$

したがって求める立体は
半径 3cm、高さ 4cm の円柱と考えることができます。

$$\begin{aligned} 3 \times 3 \times 3.14 \times 4 \\ = 36 \times 3.14 \\ = 113.04 \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

$$113.04 \text{ cm}^3$$

(2)

上の図の色つき部分を底面と考えます。

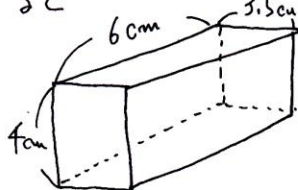
高さは、向かい合う辺の高さの平均になります。

(辺が4つのとき)

したがって高さは、

$$(3+4) \div 2 = 3.5 \text{ cm}$$

下のような直方体の体積と考える



$$4 \times 6 \times 3.5 = 84 \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$84 \text{ cm}^3$$

(3)

辺が3つあるときの高さは3辺の高さの平均になります。

高さは

$$(5+3+4) \div 3 = 4 \text{ (cm)}$$

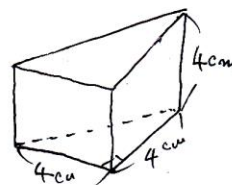
底面積は

$$4 \times 4 \div 2 = 8 \text{ (cm}^2\text{)}$$

三角柱と考えますから

体積は

$$8 \times 4 = 32 \text{ (cm}^3\text{)}$$

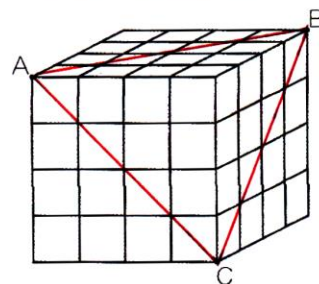


$$32 \text{ cm}^3$$

必修例題4 小立方体の切断

右の図のように、1辺が1cmの小立方体を積み重ねて、1辺が4cmの立方体を作りました。図の頂点A、B、Cを通る平面でこの立体を切断するとき、次の問いに答えなさい。

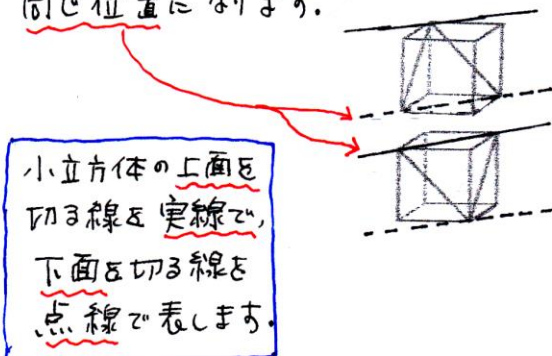
- (1) 切られる小立方体の個数は何個ですか。
- (2) 切断してできた大きい方の立体の中に、切られていない小立方体は何個ありますか。



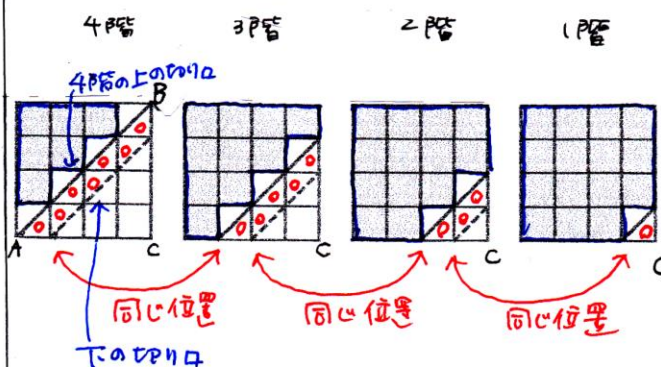
切り口は上の図のように正三角形ABCになります。

AB, AC, BC は 大きな立方体の **対角線** なので、切断される小さな立方体も **対角線に切断** されます。

また、小さな立方体は重なっているで、上の立方体と下の立方体の切り口は 同じ位置 になります。



- (1) 上から4階、3階、2階、1階とすると、下の図のようになります。



実戦と点線で囲まれた○印の数です。

したがって、切られる個数は

$$7 + 5 + 3 + 1 = 16 \text{ (個)}$$

16個

(注)

4階の3個と3階の1個の正方形(色つきでない部分)は

(1)で計算されていないので、計算で出す場合は

$$4 \times 4 \times 4 - 16 - (3 + 1) = 44 \text{ 個となります。}$$

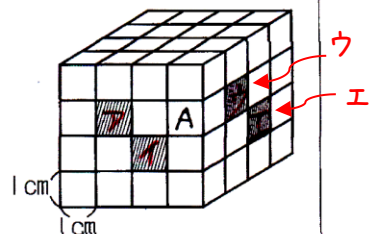
- (2) 切られていない小立方体は、上の **青枠で囲まれた正方形の部分** です。

$$6 + 10 + 13 + 15 = 44 \text{ 個}$$

44個

右の立体は、1辺4cmの立方体のとなり合う2つの面から、それぞれの面に垂直に正方形（斜線部分）の穴をあけて作ったものです。その穴はそれぞれの向かい側の面までつきぬけています。

- (1) この立体の体積を求めなさい。
- (2) この立体の表面積を求めなさい。



(1)

上から1段目と4段目は立方体の個数は $4 \times 4 = 16$ (個) ずつあるので2段目と3段目を調べます。

(2段目を上から見た図)

	X		
	X		
X	X	X	X
	X		

立方体の個数は
X印を除いた
9個です。

(3段目を上から見た図)

		X	
X	X	X	X
		X	
		X	

立方体の個数は
X印を除いた
9個です。

1個の立方体の体積は

$$1 \times 1 \times 1 = 1 \text{ cm}^3 \text{ なので}$$

求める体積は

$$(16 + 16 + 9 + 9) \times 1 = 50 \text{ (cm}^3\text{)}$$

50 cm³

(2)

外側から見える面積は ^(下書き) 立方体の表面積から $(ア + イ + ウ + エ) \times 2$ を引きます。

$$4 \times 4 \times 6 - 1 \times 1 \times 4 \times 2 = 88 \text{ (cm}^2\text{)}$$

次に中の見えない部分の面積を足します。

透明な立方体と考えると、上の図のAを正面から見ると **ウの側面** が見えます。
(裏面から見ても反対側の側面が見えます。)

このように考えると正面、真上、右横から見ると下のようになります。 **〇印**

(ア・イ・ウ・エの部分は空洞になります。)

(正面)

〇	ア	〇	〇
〇	イ	〇	〇

(真上)

	〇	〇	
〇	〇	〇	〇
〇	〇	〇	〇
	〇	〇	

(右横)

〇	ウ	〇	〇
〇	エ	〇	〇

〇印の数が中にある側面の数です。

両面あるので、その面積は

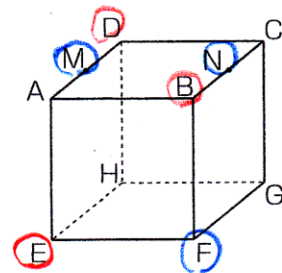
$$1 \times 1 \times (6 + 12 + 6) \times 2 = 48 \text{ (cm}^2\text{)}$$

したがって求める面積は

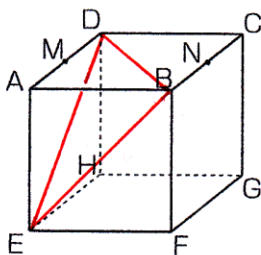
$$88 + 48 = 136 \text{ (cm}^2\text{)}$$

136 cm²

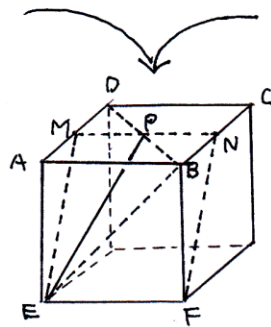
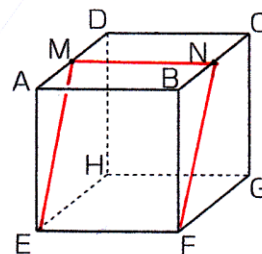
右の図の立方体 $ABCD-EFGH$ で、点 M 、 N は、
辺 AD 、 BC の中点です。このとき、3点 D 、 B 、 E
を通る平面と、3点 M 、 N 、 F を通る2つの平面で切
り分けました。このとき、頂点 A をふくむ立体の体積
は、もとの立方体の体積の何倍ですか。



3点 D 、 B 、 E を通る平面で
切断すると

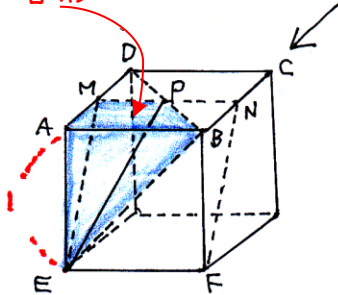


3点 M 、 N 、 F を通る平面で
切断すると



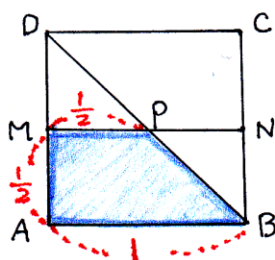
DB と MN とが交わる点を P とすると
直線 EP が2つの面の交わりの線になり
ます。

台形



求める立体は、左図のように四角形 $ABPM$ を底面、 AE を高さ
とする四角すいになります。

台形



上から見た図は左のようになりますから、
立方体の1辺の長さを1とすると、

立方体の体積は $1 \times 1 \times 1 = 1$

四角すいの体積は

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2} + 1\right) \times \frac{1}{2} \div 2}_{\text{台形部分}} \times \underbrace{1 \times \frac{1}{3}}_{\text{高さ}} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{8}$$

したがって、もとの体積の $\frac{1}{8}$ 倍になります。

$\frac{1}{8}$ 倍