

必修例題 1 等差数列・階差数列

(1) あるきまりにしたがって、数が並んでいます。

3, 7, 11, 15, 19, 23, ……

- ① 左はしからかぞえて 20 番目の数はいくつですか。
 ② 左はしから 20 番目の数までの和はいくつですか。

はじめの数が 3 で、加える数が 4 の等差数列です。

例えば 左から 3 番目の 11 は

間隔の数 (4 の個数)

 $3 + 4 \times (3 - 1) = 11$ でおぼります。↑
はじめの数 ↑
加える数

① 20 番目の数は

$$3 + 4 \times (20 - 1) = 79$$

79

②

20 個の数字
 $3 + 7 + 11 + \dots + 79$

$$= (3 + 79) \times 20 \div 2$$

はじめ おわり
 $= 820$

820

$$\begin{array}{r} 20 \text{ 個} \\ 3 + 7 + 11 + \dots + 79 \\ 79 + 75 + 71 + \dots + 3 \\ \hline 82 + 82 + 82 + \dots + 82 \\ 82 \times 20 \div 2 \\ \text{2 段合計} \end{array}$$

(2) あるきまりにしたがって、数が並んでいます。

1, 2, 4, 7, 11, 16, ……

- ① 左はしからかぞえて 10 番目の数はいくつですか。
 ② 92 は左はしからかぞえて何番目の数ですか。

例えば 左から 4 番目の 7 は

3 個

$$1 + (1 + 2 + 3) = 7$$

↓

N 番目の数は

$$1 + (1 + 2 + 3 + \dots + N - 1)$$

N - 1 (個)

① 10 番目の数は

$$\begin{aligned} & 1 + (1 + 2 + 3 + \dots + 9) \\ &= 1 + \{(1 + 9) \times 9 \div 2\} \end{aligned}$$

$$= 1 + 45$$

$$= 46$$

46

②

N 番目の数とすると、

$$1 + (1 + 2 + 3 + \dots + \Delta) = 92$$

N - 1 注意!

$$1 + 2 + 3 + \dots + \Delta = 91$$

↓

$$\begin{aligned} & 1 + 2 + 3 + \dots + 13 \\ &= (1 + 13) \times 13 \div 2 \\ &= 91 \text{ より} \end{aligned}$$

$$\Delta = 13 \rightarrow N - 1 = 13 \rightarrow N = 14$$

14 番目

14 番目

必修例題2 群数列

下のように、分数をあるきまりにしたがって並べました。

1組 $\frac{1}{2}$ / 2組 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ / 3組 $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$ / 4組 $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ / $\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \dots$

これについて、次の問いに答えなさい。

- (1) $\frac{8}{13}$ は何番目にありますか。
- (2) 50番目の分数は何ですか。
- (3) 1番目から50番目までの分数をすべて加えると、その和はいくらになりますか。

(1)

分母が13の分数の組は 12組

分子が8は 12組の左から8番目

11組までの分数の個数は

$$1 + 2 + 3 + \dots + 11 =$$

$$(1+11) \times 11 \div 2 = 66 \text{ (個)}$$

$$\text{したがって、} \frac{8}{13} \text{ は } 66 + 8 = 74 \text{ (番目)}$$

74番目

(2)

$$1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$$

9組の最後の分数は45番目

50番目の分数は 10組の左から

$$50 - 45 = 5 \text{ 番目の分数}$$

10組の分数、分母は11

$$50 \text{ 番目の分数は } \frac{5}{11}$$

$\frac{5}{11}$

(3)

$$1 \text{ 組 } \dots \dots \frac{1}{2}$$

$$2 \text{ 組の和 } \dots \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \rightarrow \frac{2}{2}$$

$$3 \text{ 組の和 } \dots \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = 1\frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{2}$$

$$4 \text{ 組の和 } \dots \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = 2 \rightarrow \frac{4}{2}$$

9組までの和は

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \dots + \frac{9}{2} = \frac{45}{2}$$

(はめかう)

10組の左から5番目までの和は

$$\frac{45}{2} + \left(\frac{1}{11} + \frac{2}{11} + \frac{3}{11} + \frac{4}{11} + \frac{5}{11} \right)$$

$$= \frac{495}{22} + \frac{30}{22}$$

$$= \frac{525}{22}$$

$$= 23\frac{19}{22}$$

$23\frac{19}{22}$

分母は2で
分子は1ずつ
増えている。

必修例題3

群数列

3と4の倍数をのぞいた数を小さい方から並べると、下のようになります。

1, 2, 5, 7, 10, 11, 13, 14, 17, ……

これについて、次の問いに答えなさい。

- (1) 53は何番目の数ですか。
(2) 100番目の数はいくつですか。

3と4の最小公倍数が12を1つの周期とて考えます。

1組 … ① ② ~~3~~ ~~4~~ ⑤ ~~6~~ ⑦ ~~8~~ ~~9~~ ⑩ ⑪ ~~12~~
2組 … ⑬ ⑭ ~~15~~ ~~16~~ ⑰ ⑱ ~~20~~ ~~21~~ ⑳ ㉑ ㉒

(1) 53は何組の数字か？

$$53 \div 12 = 4 \text{ あまり } 5$$

↓

5組の左から5つ目の数

1組に○は6個あるので、

4組までの○の数は

$$6 \times 4 = 24 \text{ (個)}$$

左から5つ目までには○は3つあるので、

(○ ○ / / ○)

53は $(24 + 3 =)$ 27番目

27番目

(2) 100番目の○は何組か？

$$100 \div 6 = 16 \text{ あまり } 4$$

↓

17組の左から4番目の○

↓

16組の最後の数は

$$12 \times 16 = 192$$

17組のようすは

⑬⑭ ⑮⑯ ⑰⑱ ㉒㉓ ㉔㉕ ㉖㉗ ㉘㉙ ㉚㉛

↑
100番目の数

199

必修例題 4 既約分数

1 より小さく、分母が 96 の分数について、次の問いに答えなさい。

$$\frac{1}{96}, \frac{2}{96}, \frac{3}{96}, \frac{4}{96}, \dots, \frac{94}{96}, \frac{95}{96}$$

(1) 既約分数 は全部で何個ありますか。

(2) 約分すると 分子が 1 になる ものは何個ありますか。ただし、 $\frac{1}{96}$ は除きます。

(1) 95 個の分数から 約分のできる数 を 引きます。

(分母の)

96 を素因数分解すると、

$$96 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

より、分子が 2 の倍数か 3 の倍数のときに約分されます。

• 2 の倍数の個数は、

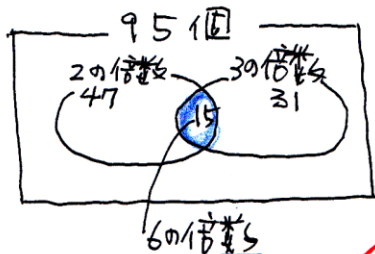
$$95 \div 2 = 47 \dots \text{より } 47 \text{ 個}$$

• 3 の倍数の個数は、

$$95 \div 3 = 31 \dots \text{より } 31 \text{ 個}$$

• 6 の倍数の個数は、

$$95 \div 6 = 15 \dots \text{より } 15 \text{ 個}$$



2 の倍数と 3 の倍数がダブっている個数を引く。

• 約分できる個数は、

$$47 + 31 - 15 = 63 \text{ (個)}$$

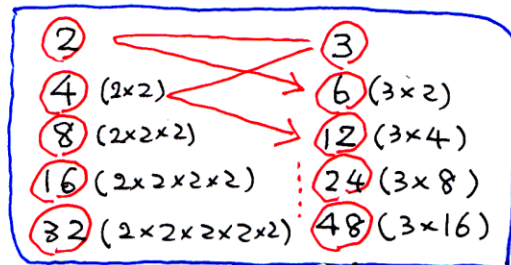
• 既約分数の個数は、

$$(\text{約分できず}) \quad 95 - 63 = 32 \text{ (個)}$$

32 個

(2) 例えば、 $\frac{2}{96} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3} = \frac{1}{48}$ となり分子が 1 になります。

すなわち、分子が



以上 10 個が約分すると分子が 1 になります。

10 個

(別解) 分母の 96 の約数の個数を調べる。

約数の個数だけ分子が 1 になるから。

$$96 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$= 2^5 \times 3^1$ と表すと約数の個数は、

$$(5+1) \times (1+1)$$

$$= 6 \times 2$$

$$= 12 \text{ (個)}$$

{1, 96} は

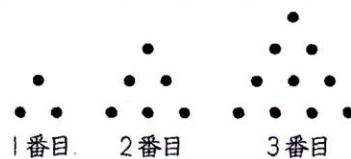
除くので、

$$12 - 2 = 10 \text{ (個)}$$

必修例題5 三角数

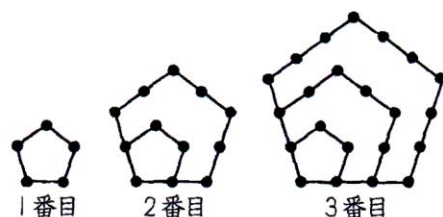
(1) 右の図のように、ご石を並べて正三角形を作ります。

10番目の図形には、ご石は何個ありますか。



(2) 右の図のように、ご石を並べて正五角形を作ります。

10番目の図形には、ご石は何個ありますか。



(1)

1番目 ... $1+2 = 3$ (個)

2番目 ... $1+2+3 = 6$ (個)

3番目 ... $1+2+3+4 = 10$ (個)

N番目 ... $1+2+3+\dots+(N+1)$

10番目のご石の個数は

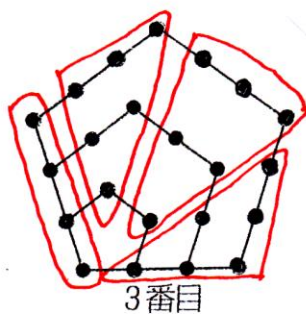
$$\begin{aligned} &1+2+3+\dots+11 \\ &= (1+11) \times 11 \div 2 \quad \leftarrow 10+1 \\ &= 66 \text{ (個)} \end{aligned}$$

66個

(2)

区切り方も工夫します。

例えば、3番目と下のように区切ります。



$(1+2+3) \times 3 + 4$ と
なります。

N番目の個数は

$$(1+2+\dots+N) \times 3 + (N+1)$$

10番目の個数は

$$\begin{aligned} &(1+2+\dots+10) \times 3 + (10+1) \\ &= 55 \times 3 + 11 \\ &= 176 \text{ (個)} \end{aligned}$$

176個

必修例題 6

数表

右のように、1から順に整数を並べていきます。たとえば、18は3行目の4列目にあります。

- (1) 1行目の8列目の数はいくつですか。
- (2) 50は何行目の何列目の数ですか。
- (3) 8行目の5列目の数はいくつですか。

1	2	4	7	11
3	5	8	12	17
6	9	13	18	24
10	14	19	25	
15				

(1) 1行目は $1 \quad 2 \quad 4 \quad 7 \quad 11 \quad 16 \quad 22 \quad 29$ $\nwarrow$ 8列目

このくらいの数は規則性を見つけて書き込んでいくのが実戦的です。
計算では

$$\begin{aligned}
 & 1 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) \\
 &= 1 + \{(1 + 7) \times 7 \div 2\} \\
 &= 1 + 28 \quad \text{ガウスの計算} \\
 &= 29 \text{ となります。}
 \end{aligned}$$

29

- (2) たてもよこも階差数列になっていますから
おおよその50の位置を探します。

とりあえず5列目のたてを考えて
みますと

$$\begin{aligned}
 11 & \dots 1\text{行} \\
 17 & \dots 2\text{行} \\
 24 & \dots 3\text{行} \\
 32 & \dots 4\text{行} \\
 41 & \dots 5\text{行} \\
 51 & \dots 6\text{行}
 \end{aligned}$$

1	2	4	7	11	
				17	
				24	
				32	
				41	50
				51	

51の位置が分かれば50はその
余計め上となります。

この方法が
実戦的です。

5行目の6列目

- (3) まず8行目の5列目をマーク
します。

1	2	4	7	11	
				17	
				24	
				32	
				41	
				51	

(2)の続きになります。

$$\begin{aligned}
 51 & \dots 6\text{行} \\
 62 & \dots 7\text{行} \\
 74 & \dots 8\text{行}
 \end{aligned}$$

74

計算するには

$$11 + 17 + 24 + \dots \bigcirc$$

$$\begin{aligned}
 & 11 + (6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12) \\
 &= 11 + \{(6 + 12) \times 7 \div 2\} = 74
 \end{aligned}$$