

[必修例題1]

270 を素因数分解しなさい。

素数は小さい順に 2, 3, 5, 7, 11, 13

...です。

右のように、270 を小さい素数から順にわっていきます。

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 270} \\ 3 \overline{) 135} \\ 3 \overline{) 45} \\ 3 \overline{) 15} \\ 5 \end{array}$$

積の形にすると

$$\Rightarrow 270 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$$

となります。

素因数に分解するとう。

$$2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$$

[必修例題2]

素因数分解を利用して、次の整数の約数の個数をそれぞれ求めなさい。

(1) 32

(2) 72

(3) 126

例えば、32 の約数をみつけると、かけて 32 になる数をさがします。

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times \\ 32 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ \times \\ 16 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ \times \\ 8 \end{array}$$

$\Rightarrow$ 32 の約数は 1, 2, 4, 8, 16, 32 の6個となります。

次のように 素因数分解をして 約数の個数を知ることができます。

a, b を素数とすると、 $a \times a \times b$ の約数の個数は

$$\begin{aligned} & a \text{ が } 2 \text{ 個}, b \text{ が } 1 \text{ 個} \text{ のとき} \\ & (2+1) \times (1+1) \\ & = 3 \times 2 \\ & = 6 \text{ (個)} \end{aligned}$$

$a \times a \times a \times b \times b$ の約数の個数は

$$\begin{aligned} & a \text{ が } 3 \text{ 個}, b \text{ が } 2 \text{ 個} \text{ のとき} \\ & (3+1) \times (2+1) \\ & = 4 \times 3 \\ & = 12 \text{ (個)} \end{aligned}$$

次のページで説明

(1)

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 32} \\ 2 \overline{) 16} \\ 2 \overline{) 8} \\ 2 \overline{) 4} \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \\ & 2 \text{ が } 5 \text{ 個} \text{ のとき} \\ & (5+1) = 6 \text{ (個)} \end{aligned}$$

6 個

(2)

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 72} \\ 2 \overline{) 36} \\ 2 \overline{) 18} \\ 3 \overline{) 9} \\ 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \\ & \downarrow \\ & (3+1) \times (2+1) \\ & = 4 \times 3 \\ & = 12 \text{ (個)} \end{aligned}$$

12 個

(3)

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 126} \\ 3 \overline{) 63} \\ 3 \overline{) 21} \\ 7 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow 2 \times 3 \times 3 \times 7 \\ & \downarrow \\ & (1+1) \times (2+1) \times (1+1) \\ & = 2 \times 3 \times 2 \\ & = 12 \text{ (個)} \end{aligned}$$

12 個

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 8 \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 72 & 36 & 24 & 18 & 12 & 9 \end{array}$$

この12個

素因数分解して約数の個数を知ることができる理由

$a \times b$ の約数は a と b に分けて表をつくると、

1 も約数なので右の図のようになります。

(ます目の数が約数の個数です)

(a の個数 + 1) $\times$ (b の個数 + 1)

$$(2+1) \times (1+1) = 3 \times 2 = 6$$

	1	a	a $\times$ a
1			
b			

$$(1) \quad 32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

	1	2	2 $\times$ 2	2 $\times$ 2 $\times$ 2	2 $\times$ 2 $\times$ 2 $\times$ 2	2 $\times$ 2 $\times$ 2 $\times$ 2 $\times$ 2
	○	○	○	○	○	○

→ 6個

$$(2) \quad 72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

	1	2	2 $\times$ 2	2 $\times$ 2 $\times$ 2
1	○	○	○	○
3	○	○	○	○
3 $\times$ 3	○	○	○	○

→ 12個

$$(3) \quad 126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$$

	1	2
1	○	○
3	○	○
3 $\times$ 3	○	○

 $\times$

	1	7
	○	○

→ $6 \times 2 = 12$ 個

[応用例題1]

1から30までの整数のうち、約数が4個である整数は全部で何個ありますか。

約数が4個ある整数は素因数分解したときに次のようになるはずです。
 $a \times b \dots\dots (ア)$
 $a \times a \times a \dots\dots (イ)$

(ア)の場合

	1	a
1	(1)	(a)
b	(b)	(a×b)

(イ)の場合(素数が1種類で3個のとき)

(1), (a), (a×a), (a×a×a)

まず素数を小さい順にいくつか並べておこう。

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

(ア)の場合,

$2 \times 3, 2 \times 5, 2 \times 7, 2 \times 11, 2 \times 13,$

$3 \times 5, 3 \times 7,$

以上の7個

(イ)の場合,

$2 \times 2 \times 2, 3 \times 3 \times 3$

以上の2個

したがっておめる個数は

$7 + 2 = 9$ (個)

9個

(覚え得)

・約数が2個の整数は

素数のみです。2, 3, 5, ...

・約数が3個の整数は,

$a \times a$ ですから平方数。

4, 9, 16, 25, ...

1, 2, 4, 1, 3, 9, 1, 5, 25, ...

注意: 16 + 36 はダメ! 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

[必修例題3]

$A < B$

2つの整数A, Bがあります。AはBより小さく、AとBの最大公約数は6、最小公倍数は144です。このとき、考えられるAとBの組み合わせを(A, B)の形で、すべて答えなさい。

まず下のように連除法の形を書きます。

最大公約数
 $6 \mid A, B$
 $a \quad b$

==>

$6 \times a = A$

$6 \times b = B$

$6 \times a \times b = 144$

↓

$a \times b = 24$

かけ算して24になる数を探します。

(a) (b) $a < b$

$1 \times 24 \dots\dots 0$

$2 \times 12 \dots\dots \times$

$3 \times 8 \dots\dots 0$

$4 \times 6 \dots\dots \times$

上のX印の $a=2, b=12$ や

$a=4, b=6$ は下のように、

さらに、2でわれてしまい、最大公約数が6ではなくなってしまう。

$6 \mid A, B$
 $2 \mid 2, 12$
 $1 \quad 6$

$6 \mid A, B$
 $2 \mid 4, 6$
 $2, 3$

aとbの「共通の約数が1だけ」すなわち

2数の最大公約数が1のとき「互いに素」といいます。

したがって,

$a=1, b=24$ と $a=3, b=8$

↓

$A=6 \times 1 = 6$

↓

$A=6 \times 3 = 18$

$B=6 \times 24 = 144$

$B=6 \times 8 = 48$

(6, 144) ↓ (18, 48)

(6, 144), (18, 48)

[必修例題4]

次の問いに答えなさい。

- (1) 24を2でわり続けるとき、何回目で商が整数でなくなりますか。
 (2) $4 \times 6 \times 8$ を2でわり続けるとき、何回目で商が整数でなくなりますか。

(1) 24を素因数分解すると、
$$\begin{array}{r} 2 \overline{)24} \\ 2 \overline{)12} \\ 2 \overline{)6} \\ 3 \end{array}$$

 $2 \times 2 \times 2 \times 3$
 となります。

1回目... $\frac{\cancel{2} \times 2 \times 2 \times 3}{\cancel{2}} = 2 \times 2 \times 3$

2回目 $\frac{\cancel{2} \times 2 \times 3}{\cancel{2}} = 2 \times 3$

3回目 $\frac{\cancel{2} \times 3}{\cancel{2}} = 3$

3回目までは2でわれるので、商が整数でなくなるのは4回目のとき

↓

素因数分解したときに24の中に
 2は3個あるので、3回はわれて4回目に
 になれなくなる。

4回目

(2) $4 = 2 \times 2$
 $6 = 2 \times 3$
 $8 = 2 \times 2 \times 2$ より

↓

$4 \times 6 \times 8 = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 3}_{2 \text{ が } 6 \text{ 個}} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{2 \text{ が } 3 \text{ 個}}$

2が6個

↓

2で6回割り切れる。

↓

7回目で商が整数でなくなる。

7回目

7個