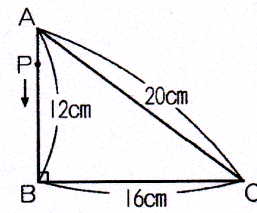


第 17 回 例題

[必修例題 1]

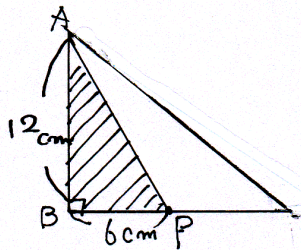
右の図のような直角三角形 ABC があります。点 P は頂点 A を出発し、毎秒 2cm の速さで矢印の方向に直角三角形の辺上を B を通って C まで動きます。

- (1) 点 P が出発してから 9 秒後 の三角形 ABP の面積は何 cm^2 ですか。
- (2) 三角形 ABP の面積が 60 cm^2 になるのは点 P が出発してから何秒後ですか。



- (1) P が 9 秒間に動いたきりは
 $2 \times 9 = 18 \text{ (cm)}$

B までが 12 cm ですから P は B を通りすぎて、さらに $(18 - 12 =) 6 \text{ cm}$ 進みます。

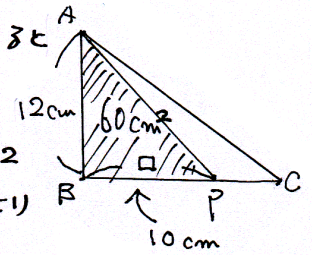


このとき、三角形 ABP の面積は

$$6 \times 12 \div 2 = 36 (\text{cm}^2)$$

$$36 \text{ cm}^2$$

- (2) $BP = \square \text{ cm}$ とすると
 $12 \times \square \div 2 = 60$
 $\square = 60 \times 2 \div 12$
 $= 10 (\text{cm})$ より



$BP = 10 \text{ cm}$ のとき すなわち

P が $(12 + 10 =) 22 \text{ cm}$ 動いたとき
 三角形 ABP の面積は 60 cm^2 になります。

毎秒 2cm なので P が出発してから

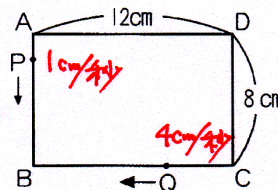
$$22 \div 2 = 11 \text{ 秒後}$$

$$11 \text{ 秒後}$$

[必修例題 2]

たて 8 cm, 横 12 cm の長方形 ABCD の辺上を, 点 P は A から 毎秒 1 cm の速さで, 点 Q は C から 毎秒 4 cm の速さで同時に出発し, それぞれ図の矢印の方向に動きます。

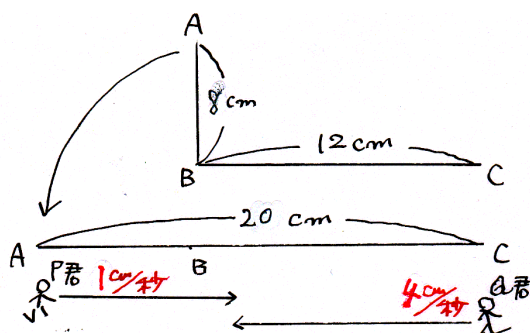
- (1) 2 点のはじめて重なるのは, 出発してから何秒後ですか。
- (2) 2 点が 5 回目に重なるのは, 出発してから何秒後ですか。



(1) はじめて **重なる** = はじめて **出会う**

↓

旅人算の出会い



(旅人算の出会い)

$$\begin{array}{l} \text{速さの和} \\ 1 + 4 = 5 \text{ cm/秒} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \square = 20 \div 5 \\ = 4 \text{ (秒)} \end{array}$$

4 秒後

(2) 1 回目の出会いまでに P と Q が進んだ距離の合計は 20 cm です。

次の出会いは「2 人で 1 周分」進みますから $(20 \times 2) = \underline{40 \text{ cm}}$

距離 2 倍

↓

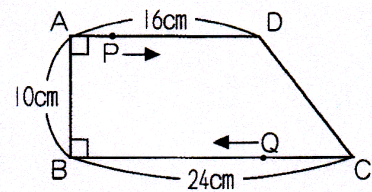
出会う時間も 2 倍かかる ので $4 \times 2 = 8 \text{ 秒}$ かかります。

- | | | |
|----------|------|---------------------------|
| 1 回目の出会い | ---- | 4 秒 |
| 2 回目 | ---- | 4 + 8 |
| 3 回目 | ---- | 4 + 8 × 2 |
| 4 回目 | ---- | 4 + 8 × 3 |
| 5 回目 | ---- | 4 + 8 × 4 = <u>36 (秒)</u> |

36 秒後

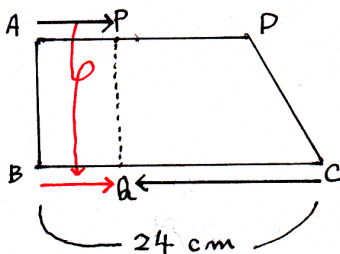
1 回目の 4 秒をたすことを
忘れずに!

右の図のような台形 ABCD の边上を、点 P は毎秒 1cm の速さで AD 間を A から、点 Q は毎秒 3cm の速さで CB 間を C から、同時に出発し 1 往復します。

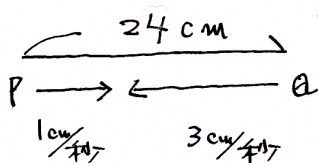


- (1) PQ と AB が、はじめて平行になるのは、出発してから何秒後ですか。
- (2) PQ と AB が、2 度目に平行になるのは、出発してから何秒後ですか。
- (3) 四角形 PQCD の面積がはじめて 100cm² となるのは、出発してから何秒後ですか。

(1) PQ と AB が平行になるのは下の図のようになります。



AP=BQ であるから P と Q が進んだ距離の和は 24cm です。
(互いの) 出会いの旅人算

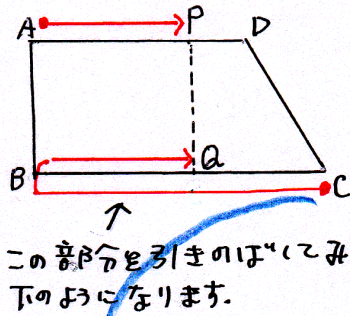


出会いにかかった時間は、
 $24 \div (1+3) = 6$ 秒

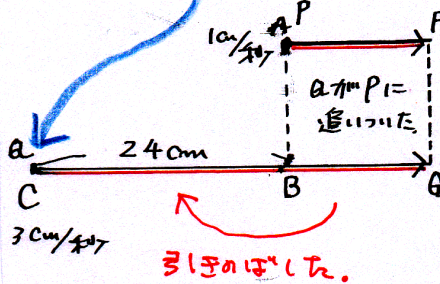
↓

6 秒後

(2) 下の図のようになります。



この部分を引きのばしてみると下のようになります。



Q は P より 24cm 後ろからスタートする追いつき問題です。したがって、
2 度目に平行になるのは、
 $24 \div (3-1) = 12$ 秒後

12 秒後

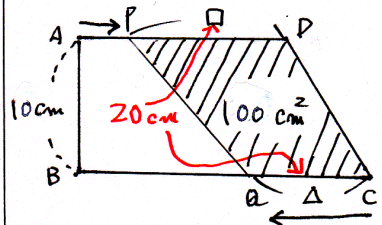
(注)

P が D に到着するのにかかる時間は $(16 \div 1) = 16$ 秒
Q が 16 秒間に進む距離は $(3 \times 16) = 48$ cm したがって BC=24cm だから、
2 度目に平行になるのは P が D に着く前です。

(3) $(\square + \triangle) \times 10 \div 2 = 100$ より

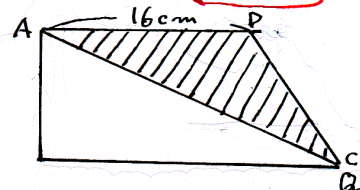
$$\square + \triangle = 100 \times 2 \div 10 = 20 (\text{cm})$$

↑ 上底と下底の和



P と Q がスタートする前の上底と下底の和は

$$16 + 0 = 16 (\text{cm})$$



$$20 - 16 = 4 (\text{cm}) \text{ より}$$

上底と下底の和が 4cm 増えたときです。

P は毎秒 1cm 右へ、Q は毎秒 3cm 左へ。

面積(上底と下底の和)は毎秒 $(3-1) = 2$ cm ずつ増えます。

1 減って 3 増える

したがって、

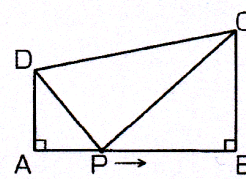
$$4 \div 2 = 2 \text{ 秒後}$$

2 秒後

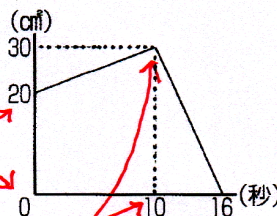
必修例題 3

(図1) のような台形 ABCD があります。点PはAを出発し、毎秒1cmの速さで辺上を矢印の方向にCまで動きます。(図2) は、このときの点Pが動き始めてからの時間と、三角形PCDの面積の変化のようすを表したものです。

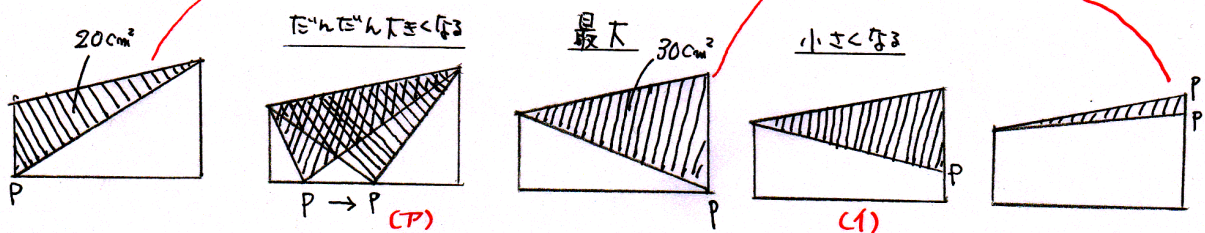
(図1)



(図2)



- (1) 辺 AD, BC の長さはそれぞれ何cmですか。
- (2) 三角形 PCD の面積が 24cm^2 になるのは、点Pが動き始めてから何秒後と何秒後ですか。



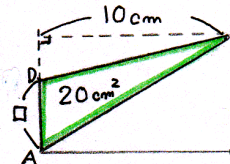
(1)

PはAB間を10秒、BC間を $16-10=6$ (秒)かかっています。
毎秒1cmなので

$$AB \cdots 1 \times 10 = 10 \text{ (cm)}$$

$$BC \cdots 1 \times 6 = 6 \text{ (cm)}$$

Pが出發する前の面積は 20cm^2 です。



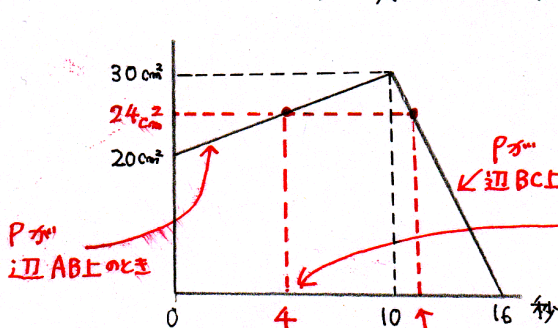
$$\square \times 10 \div 2 = 20$$

$$\square = 20 \times 2 \div 10 = 4 \text{ (cm)} \cdots \text{ADの長さ}$$

$$\text{AD} \cdots 4\text{cm}, \text{BC} \cdots 6\text{cm}$$

(2)

図の(P)と(1)のときに面積が 24cm^2 になります。
ここはグラフで考えてみます。



Pが辺AB上にあるとき
10秒で 10cm^2 増えていきます。

1秒間で 1cm^2 増えますから $24-20=4$ (cm^2)
 4cm^2 増えるのに4秒かかります。

またPが辺BC上にあるときは
6秒間で 30cm^2 減っていきます。

1秒で $30 \div 6 = 5\text{cm}^2$ 減ります。

$30-24=6$ (cm^2)へるには
 $6 \div 5 = 1.2$ (秒)かかります。
すなわち $10+1.2=11.2$ (秒後)

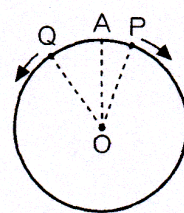
4秒後と11.2秒後

必修例題 4

円Oの周上を、2点P、QがAを同時に出発して矢印の方向にまわります。点Pは1周するのに18秒、点Qは1周するのに12秒かかります。

(1) 角POQが、はじめて直角になるのは、出発してから何秒後ですか。

(2) P、O、Qの順にはじめて一直線上に並ぶのは、出発してから何秒後ですか。



(1) Pは18秒で360度回転

↓

1秒で($360 \div 18 =$) 20度回転

Qは12秒で360度回転

↓

1秒で($360 \div 12 =$) 30度回転

PとQは反対方向に進むので、

1秒間に($20 + 30 =$) 50度開きます。

したがって、

角POQ = 90度になるのは、

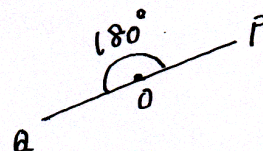
$90 \div 50 =$ 1.8秒後

1.8秒後

(2) P、O、Qが一直線になるとは

↓

角POQ = 180度になるとき



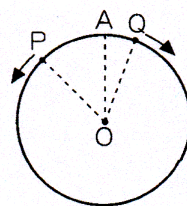
1秒間に50度開くので、

$180 \div 50 =$ 3.6秒後

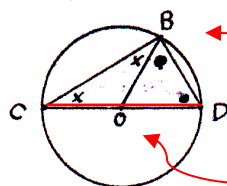
3.6秒後

応用例題 2

円周上を毎秒 30 度の割合で左回りに動く点 P と、毎秒 10 度の割合で右回りに動く点 Q があります。2 点 P, Q が A を同時に出発してから、点 P が 1 周するまでに、三角形 APQ が直角三角形になるのは何回ありますか。



三角形の一辺が 直径 であるとき 直角三角形 になります。



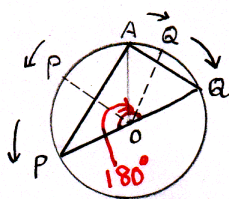
左図で 三角形 OBD, 三角形 OBC は二等辺三角形です。
($OB = OD$) ($OC = OB$)

三角形 BCD で $\bullet \bullet x x = 180^\circ \rightarrow \bullet x = 90^\circ$

★CD は直径

角 B は $x \bullet$ なので 90° になります。

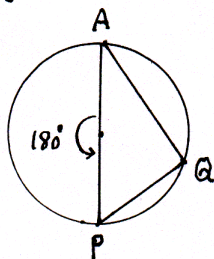
(1 回目) P, Q は A から反対向きに進むので PQ が直径 になるとき 直角三角形 になるときです。



↓
P と Q が 180° 離れたとき。

1秒で $30 + 10 = 40^\circ$ 開きますから 180° になるのは
 $180 \div 40 = 4.5$ 秒後

(2 回目) このあと 直角三角形 になるのは AP が直径 になるときです。



P は 1 秒で 30 度動きますから
角 AOP が 180 度になるのは

$180 \div 30 = 6$ 秒後です。

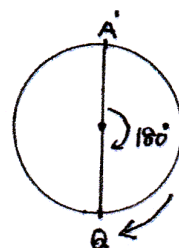
次に AQ が直径 になるときを考えてみます。

Q が図のように 180 度回転
するのにかかる時間は

$180 \div 10 = 18$ 秒

P が 1 周するのにかかる時間 は

$360 \div 30 = 12$ 秒



すると 12 秒以内 ということになり、AQ が直径になる場合はありません。

したがって、4.5 秒後と 6 秒後の 2 回 です。

2 回