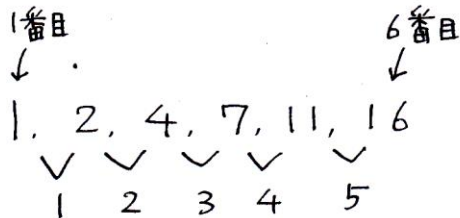


必修例題 1

下のように、あるきまりにしたがって整数を並べました。

1, 2, 4, 7, 11, 16, ……

この数列の 15 番目の数はいくつですか。



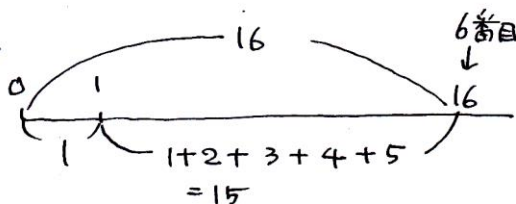
前の数と次の数の差が一定ではないので
等差数列ではありません。

例えば、6 番目の数の 16 は、

$$1 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \text{ となります。}$$

↑
1番目の数

5個
6-1=5 (間の数)



15 番目の数までの間の数は

$$15 - 1 = 14 \text{ 個}$$

したがって

1 から 14 までの和

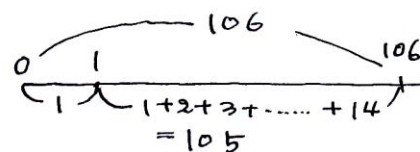
$$1 + (1 + 2 + 3 + \dots + 14)$$

$$= 1 + (1 + 14) \times 14 \div 2$$

ガウスの計算

$$= 1 + 105$$

$$= \underline{106}$$



106

(復習)

ガウスの計算

はじめの数

14個

$$1 + 2 + 3 + \dots + 14$$

$$+ 14 + 13 + 12 + \dots + 1$$

$$15 + 15 + 15 + \dots + 15$$

おわりの数

2列足して
113の2

$$(\text{はじめの数} + \text{おわりの数}) \times \text{個数} \div 2$$

$$(1 + 14) \times 14 \div 2 = 105$$

必修例題 2

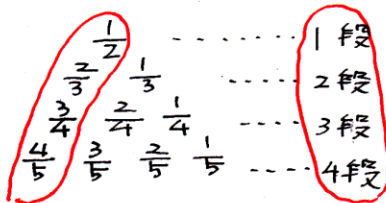
下のように、あるきまりにしたがって分数を並べました。

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{5}{6}, \frac{4}{6}, \dots$

- (1) $\frac{3}{10}$ は何番目の分数ですか。
(2) 100番目の分数はいくつですか。

(1)

分母の数字の個数で、ピラミッド型に並べてみます。



左側に並んだ分数をみると
1段目は $\frac{1}{2}$, 2段目は $\frac{2}{3}$, 3段目は $\frac{3}{4}$ で
分子の数と段目の数が同じです。

また分母は分子に1をたした数です。

したがって、 $\frac{9}{10}$ は 9段目で

$\frac{9}{10}, \frac{8}{10}, \frac{7}{10}, \frac{6}{10}, \frac{5}{10}, \frac{4}{10}, \frac{3}{10}$

となるので 左から7番目の分数
とわかります。

まず8段目までの分数の個数を求めます。

$1+2+3+4+5+6+7+8$ なので

$(1+8) \times 8 \div 2 = 36$ (個)

9段目に7個ありますから

$36+7=43$ (個)

↓

43番目

43番目

(2)

100番目(個目)の分数が何段目にあるかを調べます。

$1+2+3+\dots+13$

$= (1+13) \times 13 \div 2$

$= 91$ 13段目までの個数。

$91+9=100$ より

100番目の分数は

14段目の左から9つ目です。

14段目の一番左の分数は $\frac{14}{15}$ ですから。

$\frac{14}{15}, \frac{13}{15}, \frac{12}{15}, \frac{11}{15}, \frac{10}{15}, \frac{9}{15}, \frac{8}{15}, \frac{7}{15}, \frac{6}{15}$

↑

左から9つ目

$\frac{6}{15}$

必修例題 3

3と4の倍数を除いた数を小さい順に並べると、下のようになります。

1, 2, 5, 7, 10, 11, 13, 14, 17, ……

- (1) 58は何番目の数ですか。
- (2) 99番目の数はいくつですか。

① ② 3 4 ⑤ 6 ⑦ 8 9 ⑩ ⑪ 12
⑬ ⑭ 15 16 ⑰ 18 ⑱ 20 21 ⑳ ㉑ ㉒

上の図からわかるように、3と4の最小公倍数の12が周期になっていて、その中に6個の○が入っています。

また、
 $13 \div 12 = 1$ 余り ①
 $14 \div 12 = 1$ 余り ②
 $17 \div 12 = 1$ 余り ⑤
 $19 \div 12 = 1$ 余り ⑦
 $22 \div 12 = 1$ 余り ⑩
 $23 \div 12 = 1$ 余り ⑪

のように、この数列に並んでいる数を12でわると、そのあまりは{1, 2, 5, 7, 10, 11}の周期になっています。

左から1番目 左から2番目 左から5番目

(1) $58 \div 12 = 4$ 余り ⑩

1つの周期に6個の数字があるので、
 $6 \times 4 + 5 = 29$ (番目)

29番目

(2) 99番目ということは99個目の○です。

$99 \div 6 = 16$ 余り 3 より
 16周期十次の左から3つ目の○です。

1つの周期は12のかたまりですから

$$12 \times 16 = 192$$

そのあとは

⑬ ⑭ 15, 16, ⑰, 18, 19, ……

197

必修例題 4

右のように、あるきまりにしたがって数を並べました。

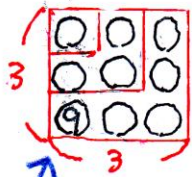
- (1) 120は何段目の左から何番目にありますか。
 (2) 5段目の左から9番目の整数はいくつですか。

1段目	1	2	5	10	17
2段目	4	3	6	11	18
3段目	9	8	7	12	...
4段目	16	15	14	13	...
5段目	...	...	...	...	...

	1組	2組	3組	4組	5組
1段目	①	2	5	10	17
2段目	④	3	6	11	18
3段目	⑨	8	7	12	...
4段目	⑬	15	14	13	...
5段目	...	...	...	...	...

上の図のように、組に分けて考えると 各組の最後の数(1, 4, 9, 16, ...)は 平方数 になっています。

これは、例えば $1+3+5=9$ で、
 3組までの数字の個数は



左の図のように

正方形の

1×1 で求めることができます。

平方数とは

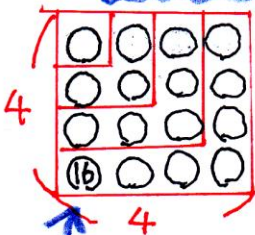
同じ数を2回かけて
 できる数です。

$$1 \times 1 = 1, 2 \times 2 = 4$$

$$3 \times 3 = 9 \dots$$

したがって、3組の最後の数は
 $3 \times 3 = 9$ になります。

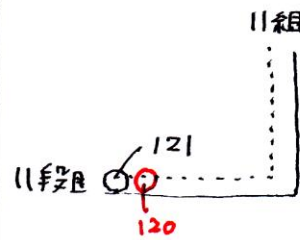
同様に4組までの数字の個数は
 $1+3+5+7=16$ で、図のように



$4 \times 4 = 16$ の正方形

の面積で求めることができます。

- (1) $10 \times 10 = 100$ 、 $11 \times 11 = 121$ より



121は11組の最後の
 の数で、120はその
 1つ前の数

↓
11段目の左から2番目

11段目の左から2番目

- (2) 5段目の 左から9番目 の数は
 ↓
9組の上から5番目の数 です。

下の図のように、8組の最後の数は

$$8 \times 8 = 64 \text{ なので}$$

9組は65からはじまりますから
 上から5番目の数は69です。

						8組	9組
1段目	1	2	5	10	17	○	○ 65
2段目	4	3	6	11	18	○	○
3段目	9	8	7	12	...	○	○
4段目	16	15	14	13	...	○	○
5段目						→	69
6							
7							
8段目	←						64
9段目							

69

右のように、あるきまりにしたがって数を並べました。これについて、次の問いに答えなさい。

1 段目	1	2	4	7	11	...
2 段目	3	5	8	12	...	
3 段目	6	9	13	...		
4 段目	10	14	...			
5 段目	15	...				

- (1) 95は何段目の左から何番目にありますか。
 (2) 15 段目の一番左にある整数はいくつですか。
 (3) 8 段目の左から 10 番目の整数はいくつですか。

(1)

	1組	2組	3組	4組	5組	
1 段目	1	2	4	7	11	...
2 段目	3	5	8	12	...	
3 段目	6	9	13	...		
4 段目	10	14	...			
5 段目	15	...				

上のよりに区切って考えます。

例えば 3 組の最後の数は 1 組～3 組の数字の個数ですから

$$1 + 2 + 3 = 6 \text{ になります。}$$

↑
3 段目のはじめの数。

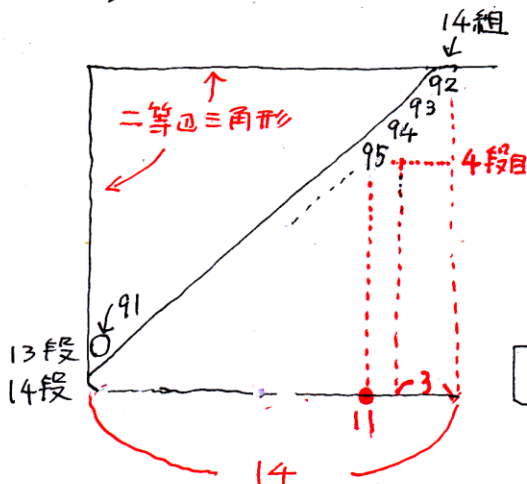
95 は 95 個目の数です。

$$1 + 2 + 3 + \dots + 13 = 91$$

$$95 = (1 + 2 + 3 + \dots + 13) + 4$$

↑ ↑
13 組 14 組目

14 組目の上から 4 段目が求める位置です。



95 は右から 4 個目でから
左から
 $14 - 3 = 11$ (番目)
($14 - 4 + 1 = 11$ でもよい)

4 段目の 11 番目

(2)

例えば 3 段目の一番左にある数は 3 組目までの数字の個数の和ですから
15 段目の一番左にある数は

$$\begin{aligned} &1 + 2 + 3 + \dots + 15 \\ &= (1 + 15) \times 15 \div 2 \\ &= 120 \end{aligned}$$

120

(3)

左の図で、各組の位置を

$x = \text{何段目}$

$y = \text{左から何番目}$

として

(x, y) で表わすと

例えば 4 組は、

左から	1 番目	2 番目	3 番目	4 番目	5 番目	
1 段目	1	2	4	7	11	...
2 段目	3	5	8	12	...	
3 段目	6	9	13	...		
4 段目	10	14	...			
5 段目	15	...				

$a \dots (1, 4)$ $b \dots (2, 3)$ $c \dots (3, 2)$ $d \dots (4, 1)$

4 組の a, b, c, d とともに $x + y = 5$ になります。

↓

$$(x + y) - 1 = \square \text{ 組}$$

したがって、8 番目の左から 10 番目の数は、

$$(8 + 10 - 1) = 17 \text{ 組の 8 番目}$$

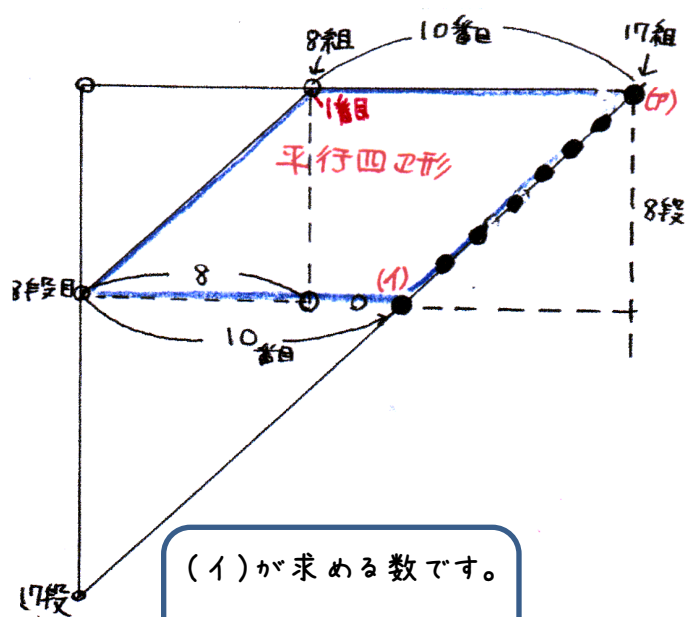
↓

$$16 \text{ 組までの数字の個数} + 8$$

↓

$$(1 + 2 + 3 + \dots + 16) + 8 = 144$$

144



(1)が求める数です。

(1)は何組の数？

8組から数えて10番目ですから

$$8+10-1 = 17 \text{ 組です。}$$

16組の最後の数は

$$1+2+3+\cdots+16=136 \text{ より,}$$

17組の最初の数は137

したがって,

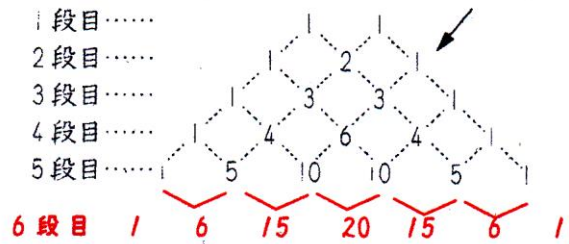
137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144 となります。

$$136+8=144$$

144

右の図のように、あるきまりにしたがって数を並べます。

- (1) 6 段目の数を左から順に答えなさい。
- (2) 8 段目に並ぶ数の和を求めなさい。
- (3) 図の矢印の部分には、1 番目が 1, 2 番目が 3, 3 番目が 6, …のように数が並んでいます。100 番目に並ぶ数を求めなさい。



(1) 両端の 1 以外は上の 2 つの数字の和が下の数字になります。

6 段目は上の図のようになりますから左から、1, 6, 15, 20, 15, 6, 1 です。

1, 6, 15, 20, 15, 6, 1

(2) axa を a^2 $axaxa$ を a^3 と表すと

各段の和は上から、

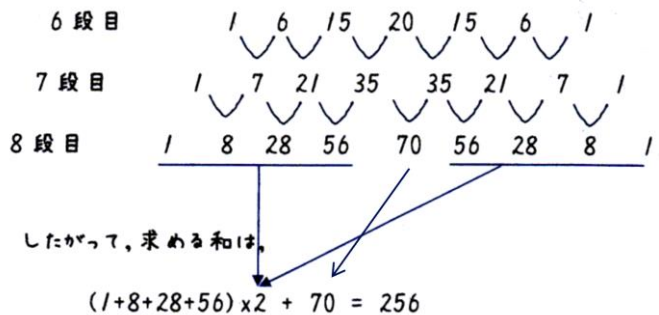
2, 4, 8, 16, 32, …で、
 2^1 2^2 2^3 2^4 2^5 …

すると、8 段目は 2^8 となり、

$$\begin{aligned} 2^8 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \\ &= 8 \times 8 \times 4 \\ &= 256 \end{aligned}$$

256

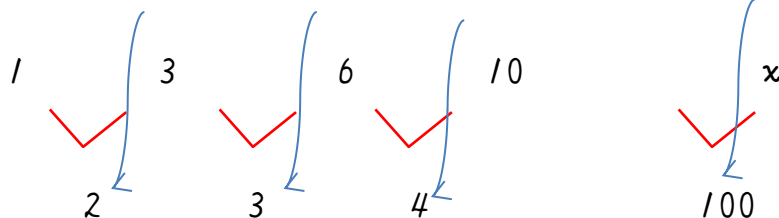
別解



$$(1+8+28+56) \times 2 + 70 = 256$$

256

(3) 1 番目 2 番目 3 番目 4 番目 … 100 番目



例えば、4 番目の 10 は $1 + (2 + 3 + 4) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ となります。

したがって、100 番目並ぶ数は、

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = (1 + 100) \times 100 \div 2$$

$$\begin{aligned} &= 10 \times 50 \\ &= 5050 \end{aligned}$$

5050