

必修例題6 素因数分解の応用②

表には1から50までの整数を書き、裏には何も書かれていないカード50枚を下のように並べました。

1 2 3 4 5 6 ... 49 50

はじめに、左から2枚ごとにカードを裏返すと、下のようになります。

1 □ 3 □ 5 □ ... 49 □

続いて左から3枚ごと、4枚ごと、5枚ごと、……、50枚ごとにカードを裏返しました。

- (1) 3回裏返されたカードは、全部で何枚ありますか。
- (2) 表面が上になっているカードは、全部で何枚ありますか。

(1) 3回だけ裏返された。

↓
カードに書かれた数字の約数の個数が4個のものを調べます。

$3+1=4$ 個の約数

1は裏返しにできないから!

a, b を素数とし、
 $a \times a$ を a^2 (a の2乗) のように表すと、
 約数の個数は

$a \times a \sim a^2 \rightarrow 2+1=3$ 個 ... P

$a \times a \times a \sim a^3 \rightarrow 3+1=4$ 個 ... I

$a \times b = a^1 \times b^1$
 $= (1+1) \times (1+1)$
 $= 2 \times 2 = 4$ 個 ... $ウ$

ここでは、4個の約数ですから 1とウ の場合です。

I の ... $2 \times 2 \times 2$
 $3 \times 3 \times 3$) の 2個

$ウ$ の形 ... $(2 \times 3), (2 \times 5), (2 \times 7), (2 \times 11), (2 \times 13), (2 \times 17), (2 \times 19), (2 \times 23),$
 $(3 \times 5), (3 \times 7), (3 \times 11), (3 \times 13), (5 \times 7)$ の 13個 全部で $(2+13)=15$ 個 (枚)

(2) 1回目で裏、2回目で表、3回目で裏……となり、

表になるのは、偶数回裏返された。

↓
1を除く約数が偶数個

↓
計算上では1を加えるので、約数の個数が奇数個の整数を調べます。

P の形以外で、 $a^4 = a \times a \times a \times a$ のときも約数は奇数個になります。

(例: $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 \rightarrow$ $\begin{matrix} 1 \times 16 \\ 2 \times 8 \\ 4 \times 4 \end{matrix}$ 約数は5個)

\uparrow
4×4の平方数

全ての平方数の約数の個数は奇数個

したがって、このような数は1~50までに、

$(1 \times 1 = 1), (2 \times 2 = 4), (3 \times 3 = 9), (4 \times 4 = 16),$
 $(5 \times 5 = 25), (6 \times 6 = 36), (7 \times 7 = 49)$ の 7個(枚) あります。

7枚

15枚