

計算の工夫(2)

次の問いに答えなさい。

(1) $\frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{\boxed{\text{ア}}}$, $\frac{1}{4 \times 5} = \frac{1}{4} - \frac{1}{\boxed{\text{イ}}}$ のア, イにあてはまる数を求めなさい。

(2) (1)の式を利用して, 次の計算をしなさい。

$$\frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7} + \frac{1}{7 \times 8} + \frac{1}{8 \times 9}$$

例えば $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ を計算してみます。

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{2 \times 3} - \frac{2}{2 \times 3} = \frac{1}{2 \times 3}$$

逆にすると $\frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ となります。

すなわち、分母が続き数字で分子が1 のとき常にこの関係が成り立ちます。

(1) $\frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ ですから $\text{ア} = 4$ です

また $\frac{1}{4 \times 5} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ ですから $\text{イ} = 5$ です

$\boxed{\text{ア} = 4, \text{イ} = 5}$

(2) これを連続した分数で考えてみます。

$$\frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7} + \frac{1}{7 \times 8} + \frac{1}{8 \times 9}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9}$$

$-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$ となりますから 0 です。

すると中の分数は全て消えられ、外の2つの分数が残ります。

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{3-1}{9} = \frac{2}{9}$$

$\boxed{\frac{2}{9}}$

(おまけ) $\frac{1}{3 \times 5}$ のように分母が続き数字でないものも考えてみます。

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{5}{3 \times 5} - \frac{3}{3 \times 5} = \frac{2}{3 \times 5}$$

$\frac{1}{3 \times 5}$ にするためには $\frac{2}{3 \times 5} = \frac{1}{2}$ をかけます。

したがって

$$\frac{1}{3 \times 5} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \times \frac{1}{2}$$
 となります。

(例題) $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} = \square$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \times \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5}\right) \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$