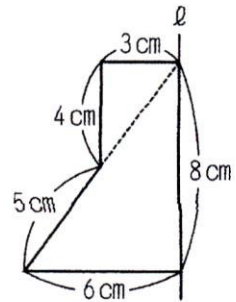


必修例題 1

複合立体の求積

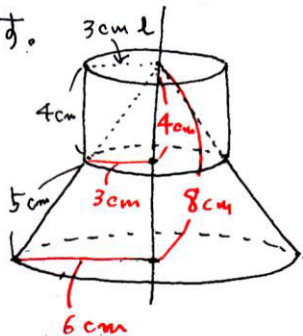
右の図は、長方形と台形を組み合わせた図形です。この図形を、直線 ℓ を軸にして 1 回転させたときにできる立体について、次の問いに答えなさい。ただし、円周率は 3.14 とします。

- (1) この立体の体積は何 cm^3 ですか。
 (2) この立体の表面積は何 cm^2 ですか。



(1)

この図形を回転させてできる立体は下の図のように 円柱と円すい台 を合わせた立体になります。



- 円柱部分の体積は

$$3 \times 3 \times 3.14 \times 4 = 36 \times 3.14 \text{ (cm}^3\text{)}$$

- 円すい台の体積は 大きい円すいから、小さい円すいを引いたものです。

$$\begin{aligned} & 6 \times 6 \times 3.14 \times 8 \times \frac{1}{3} - 3 \times 3 \times 3.14 \times 4 \times \frac{1}{3} \\ &= (288 - 36) \times \frac{1}{3} \times 3.14 \\ &= 84 \times 3.14 \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

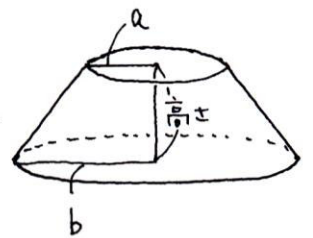
- したがって求める体積は

$$\begin{aligned} & 36 \times 3.14 + 84 \times 3.14 \\ &= (36 + 84) \times 3.14 \\ &= 120 \times 3.14 \\ &= 376.8 \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

$$376.8 \text{ cm}^3$$

(円すい台の体積を求める公式)

底面の半径をそれぞれ a, b とします。

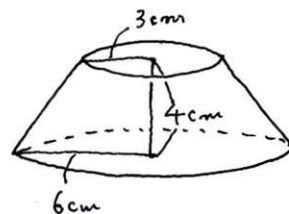


円すい台の体積は

$$(a \times a + a \times b + b \times b) \times 3.14 \times \text{高さ} \times \frac{1}{3}$$

上の公式を利用して (1) の円すい台を計算すると

$$\begin{aligned} & (3 \times 3 + 3 \times 6 + 6 \times 6) \times 3.14 \times 4 \times \frac{1}{3} \\ &= 63 \times 4 \times \frac{1}{3} \times 3.14 \\ &= 84 \times 3.14 \text{ (cm}^3\text{)} \text{ となります。} \end{aligned}$$

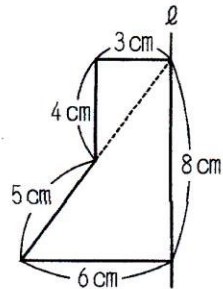


必修例題 1

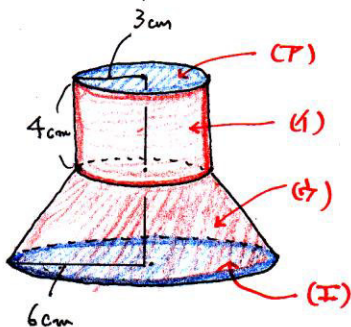
複合立体の求積

右の図は、長方形と台形を組み合わせた図形です。この図形を、直線 ℓ を軸にして1回転させたときにできる立体について、次の問いに答えなさい。ただし、円周率は3.14とします。

- (1) この立体の体積は何 cm^3 ですか。
- (2) この立体の表面積は何 cm^2 ですか。

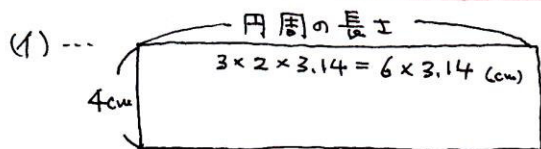


(2)



上の図のように、(ア)、(イ)、(ウ)、(エ)の4つの部分に分けて計算します。

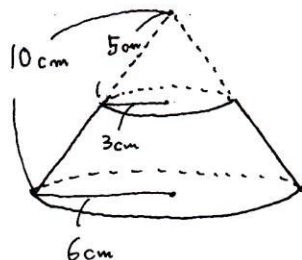
(ア) ... $3 \times 3 \times 3.14 = 9 \times 3.14 \text{ (cm}^2\text{)}$



$6 \times 3.14 \times 4 = 24 \times 3.14 \text{ (cm}^2\text{)}$

(ウ) ...

大きい円すいの側面積から小さい円すいの側面積を引きます。



円すいの側面積は
底面の半径 $\times$ 母線 $\times 3.14$

・ 大きい円すいの側面積は
 $6 \times 10 \times 3.14 = 60 \times 3.14$

・ 小さい円すいの側面積は
 $3 \times 5 \times 3.14 = 15 \times 3.14$

これより(ウ)の部分の面積は

$60 \times 3.14 - 15 \times 3.14$

$= (60 - 15) \times 3.14$

$= 45 \times 3.14 \text{ (cm}^2\text{)}$

(エ) ... $6 \times 6 \times 3.14 = 36 \times 3.14 \text{ (cm}^2\text{)}$

したがって求める表面積は

$(9 + 24 + 45 + 36) \times 3.14$

$= 114 \times 3.14$

$= 357.96 \text{ (cm}^2\text{)}$

357.96 cm^2

必修例題 2

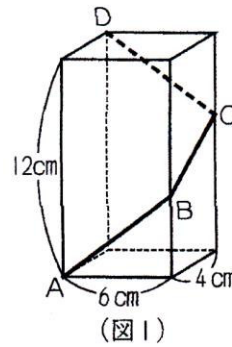
展開図の応用(立体表面上の最短距離)

次の問いに答えなさい。

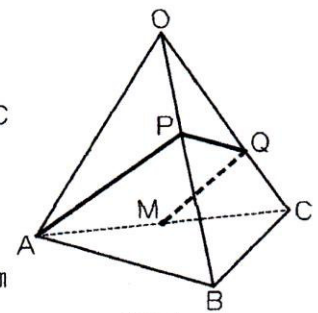
- (1) (図1) のような直方体があります。この直方体の底面の1つの頂点Aから、上の面の頂点Dまで糸をピンと張りました。Cの高さは何cmですか。

- (2) (図2) のような1辺の長さが10cmの正四面体O-ABCがあります。辺ACのまん中の点をMとし、辺OB, OC上にそれぞれ点P, Qをとります。

直線AP, PQ, QMの長さの和が最小になるとき、AP:PQ:QMの比を求めなさい。

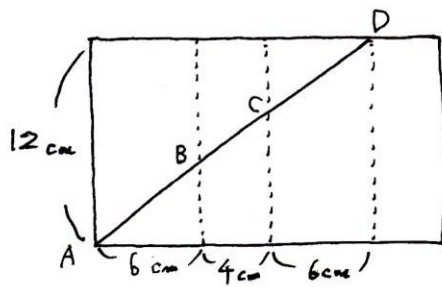


(図1)

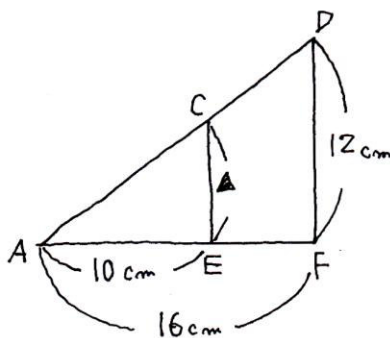


(図2)

- (1) 直方体を展開します。このときAとDを結んだ直線が最短距離です。



ここで三角形の相似を利用してCの高さを出します。



左下の図で三角形ACEと三角形ADFの相似比は

$$10\text{cm} : 16\text{cm} = 5 : 8$$

$$\triangle : 12 = 5 : 8 \text{ より}$$

$$\triangle \times 8 = 12 \times 5$$

$$\begin{aligned} \triangle &= 12 \times 5 \div 8 \\ &= 7.5 (\text{cm}) \end{aligned}$$

7.5 cm

(★) $CE : DF = 5 : 8$ のとき CE は DF の $\frac{5}{8}$ なので $CE = 12 \times \frac{5}{8} = 7.5 (\text{cm})$

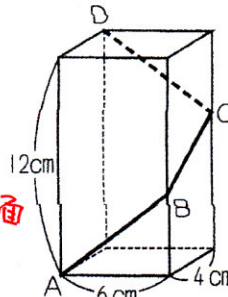
これは $CE : DF = 5 : 8 = \frac{5}{8} : 1$ で DF を 1 としたとき CE は $\frac{5}{8}$ になるからです。

必修例題 2

展開図の応用(立体表面上の最短距離)

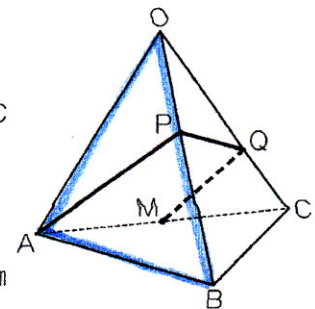
次の問いに答えなさい。

- (1) (図1) のような直方体があります。この直方体の底面の1つの頂点Aから、上の面の頂点Dまで糸をピンと張りました。Cの高さは何cmですか。



(図1)

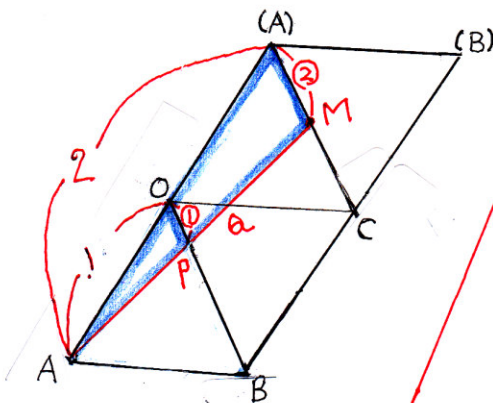
- (2) (図2) のような1辺の長さが10cmの正四面体O-ABCがあります。辺ACのまん中の点をMとし、辺OB, OC上にそれぞれ点P, Qをとります。



(図2)

直線AP, PQ, QMの長さの和が最小になるとき、AP:PQ:QMの比を求めなさい。

(2)



展開図の書き方はいろいろありますが、ここでは 三角形OABを元にして、OB, OC, ACに面をくっつけていきます。

ACのまん中にMをとり、AとMを結ぶ。直線がOB, OCと交わる点が必要なP, Qです。

このとき、AP+PQ+QMが最小になります。
(最短距離)

まず、上の青色部分において、三角形AOPとA(A)Mは 1:2の相似形なので

$$OP:(A)M = 1:2$$

Mは(A)Cのまん中点なので、(AM)の長さは5cm

②が5cmなので

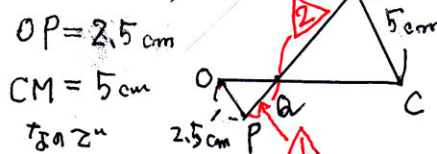
①は2.5cm

... OPの長さ

次に、

三角形OQPと三角形CQMに着目します。

2つの三角形は70度型の相似形です。



$$OP:CM = 2.5:5 = 1:2$$

$$PQ:QM = 1:2$$

次に

三角形OQPと三角形BAPに着目します。

2つの三角形は70度型の相似形です。

$$OP = 2.5\text{cm}$$

$$PB = 10 - 2.5 = 7.5\text{cm}$$

$$OP:PB = 2.5:7.5 = 1:3$$

$$PQ:AP = 1:3$$

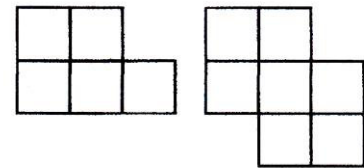
$$\begin{array}{r} AP:PQ:QM \\ 3:1:2 \\ \hline 3:1:2 \end{array}$$

$$3:1:2$$

必修例題 3 投影図の応用

右の図は、1辺が1cmの立方体を積み重ねてできた立体を、正面から見た図と真上から見た図を表しています。

正面から見た図 真上から見た図



(1) この立体に使われている立方体の個数は、何個以上何個以下と考えられますか。

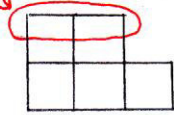
(2) 立方体が最も多く使われた立体の表面積は何 cm^2 ですか。

(3) 立方体が最も多く使われた立体の表面全体を赤くぬったあと、もとの立方体にもどしました。このとき、3つの面だけが赤くぬられている立方体は何個ありますか。

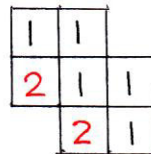
(1) 最も少ないときは

コノ2つボと"こカ1カ"にあればよい。

まじから見た図に1個数を書き入れています。



正面から見た図

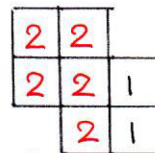
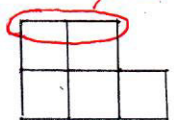


↑ ↑ ↑
2 2 1
(正面から見える数)

この場合 $2 \times 2 + 1 \times 5 = 9$ (個)

最も多いとき

全ての場所にもコノ2つを置けばよい



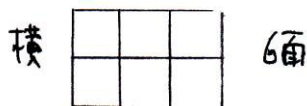
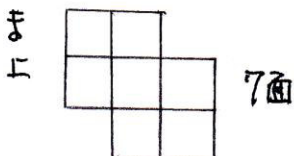
↑ ↑ ↑
2 2 1
(正面から見える数)

この場合 $2 \times 5 + 1 \times 2 = 12$ (個)

以上より 9個以上12個以下となります。

9個以上12個以下

(2)



面面積をわかれあはすから

面の合計は

$$2 \times (5 + 7 + 6) = 36 \text{ (面)}$$

1面の面積は

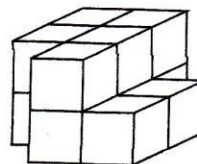
$$1 \times 1 = 1 \text{ (cm}^2\text{) より}$$

$$1 \times 36 = 36 \text{ (cm}^2\text{)}$$

36 cm^2

(3)

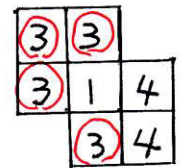
(見取り図)



各段ごとに赤くぬられて
いる面の数を言わねばす。

(上の段)

(下の段)



全部で7個です。

7個

必修例題 4

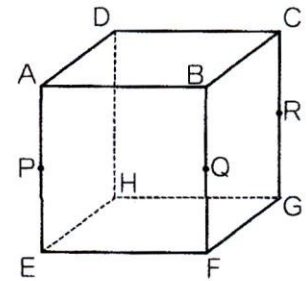
立方体の切断①

右の図は立方体で、P、Q、Rは、それぞれ辺の真ん中の点です。次の3点を通る平面で、この立方体を切るとき、その切り口の形を答えなさい。

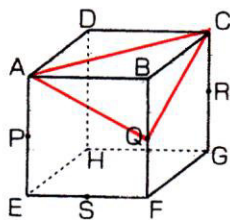
(1) 3点(A, C, Q)

(2) 3点(A, D, R)

(3) 3点(C, F, P)



(1) 3点 A, C, Q

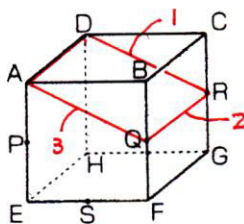


同じ平面上にあれば線で結ぶことができます。

AとC, AとQ, CとQは同じ平面上にありますから左図のようになります。

↓
三角形 (AQ=CQなので二等辺三角形)

(2) 3点 A, D, R



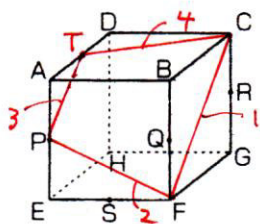
DとRは同じ平面上にありますから線で結びます。

次にRからADに平行な線を引きます。(RQ)

次にQとAは同じ平面上ですから線で結びます。

↓
角A, 角Dは直角ですから長方形になります。

(3) 3点 C, F, P



CとF, FPは同じ平面ですから線で結びます。

次にPからFCに平行な線を引きます。
辺ADとの交点をTとすると、BF=FCより

$$\downarrow$$

$$AP=AT$$

次にTとCを結びます。

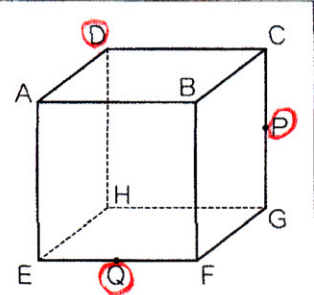
↓
PTとFCは平行ですから台形 (PF=TCより等脚台形)

(1) 三角形(二等辺三角形) (2) 長方形 (3) 台形(等脚台形)

必修例題 5 立方体の切断②

1 辺が 6 cm の立方体 ABCD-EFGH があります。点 P、Q は、それぞれ辺の真ん中の点です。この立方体を、3 つの点 D、P、Q を通る平面で、2 つの立体に切り分けました。

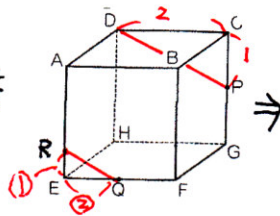
- (1) 切り口の平面が辺 AE と交わる点を R とするとき、ER の長さは何 cm ですか。
 (2) 切り口の平面が辺 FG と交わる点を S とするとき、FS の長さは何 cm ですか。



- (1) 同じ平面上の点と点は結ぶますから、
 まず、D と P を結ぶます。

次に、Q から DP に平行な線 QR を引きます。

このとき、



$DC : CP = 2 : 1$ なので、 $RE : EQ = 1 : 2$ になるように R を決め、D と R を結ぶます。



Q は EF の真ん中の点 (中点) なので
 $EQ = 3$ (cm)

したがって、ER の長さは

$$3 \div 2 = 1.5 \text{ (cm)}$$

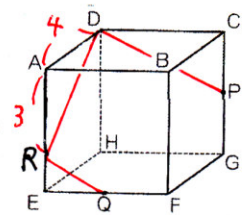
1.5 cm

- (2)

D と R を結ぶます。

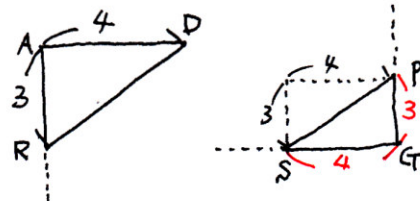
次に、P から DR に平行な線 PS を引きます。

このとき、



$$DA : AR = 6 \text{ cm} : (6 - 1.5) \text{ cm} \\ = 4 : 3 \text{ となる。}$$

$PG : GS = 3 : 4$ になるように S を決めます。



P は CG の真ん中の点なので

$$PG = 3 \text{ (cm)}$$

$$GS = 4 \text{ (cm)}$$

↓

したがって、FS の長さは

$$6 - 4 = 2 \text{ (cm)}$$

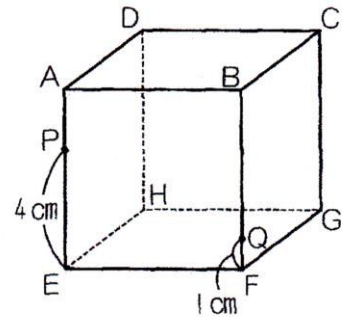
2 cm

ステップアップ

立方体の切断③

1 辺が 6 cm の立方体 ABCD-EFGH があります。点 P は辺 AE 上の E から 4 cm のところに、点 Q は辺 BF 上の F から 1 cm のところにあります。

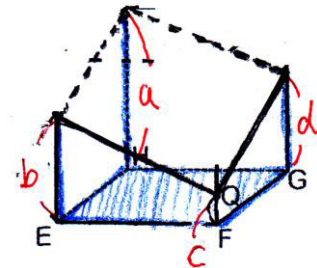
- (1) この立方体を、3 点 D, P, Q を通る平面で 2 つに切り分けたとき、点 E をふくむ方の立体の体積を求めなさい。
- (2) この立方体を、3 点 P, F, C を通る平面で 2 つに切り分けたとき、点 A をふくむ方の立体の体積を求めなさい。



右の図で、**氷**をイメージすると解けて水になったとき **水面は水平** になります。

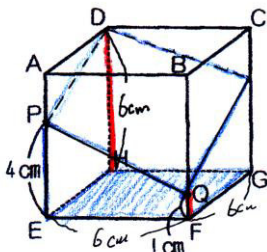
このとき、 $a+c = b+d$ なので

水面の高さは平均の $\frac{a+c}{2}$ または $\frac{b+d}{2}$ となります。



(1) E を含む立体の体積は

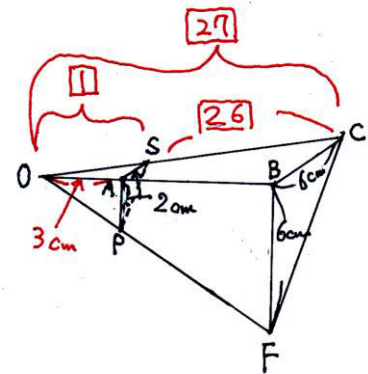
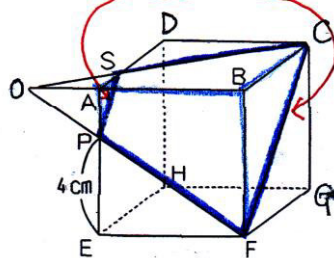
「底面積×高さ」より、



$$6 \times 6 \times \frac{6+1}{2} = 126 \text{ cm}^3$$

$$126 \text{ cm}^3$$

(2) **平行**



求める立体は上の図の**青枠部分**で、
大きな三角錐から小さな三角錐を引いたものです。

$$AP=AS=(6-4)=2\text{ cm} \quad BF=BC=6\text{ cm} \text{ より、}$$

$$OA:OB=AP:BF=2\text{ cm}:6\text{ cm}=1:3$$

$$OA:AB=1:(3-1)=1:2$$

$$OA \text{ の長さは } 6\text{ cm} \times \frac{1}{2} = 3 \text{ cm}$$

また、

小さな三角錐と大きな三角錐の体積比は

$$(1 \times 1 \times 1) : (3 \times 3 \times 3) = 1 : 27 \text{ なので、}$$

求める **青枠部分**の体積比は

$$(27-1)=26 \rightarrow \text{小さい三角錐の26倍}$$

よって、

$$2 \times 2 \div 2 \times 3 \times \frac{1}{3} \times 26 = 52 \text{ cm}^3$$

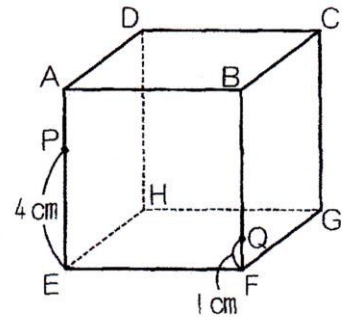
$$52 \text{ cm}^3$$

ステップアップ

立方体の切断③

1 辺が 6 cm の立方体 ABCD-EFGH があります。点 P は辺 AE 上の E から 4 cm のところに、点 Q は辺 BF 上の F から 1 cm のところにあります。

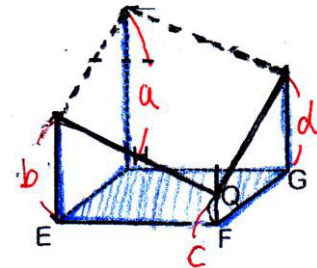
- (1) この立方体を、3 点 D, P, Q を通る平面で 2 つに切り分けたとき、点 E をふくむ方の立体の体積を求めなさい。
- (2) この立方体を、3 点 P, F, C を通る平面で 2 つに切り分けたとき、点 A をふくむ方の立体の体積を求めなさい。



右の図で、**氷**をイメージすると解けて水になったとき **水面は水平** になります。

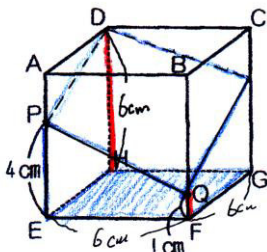
このとき、 $a+c = b+d$ なので

水面の高さは平均の $\frac{a+c}{2}$ または $\frac{b+d}{2}$ となります。



(1) E を含む立体の体積は

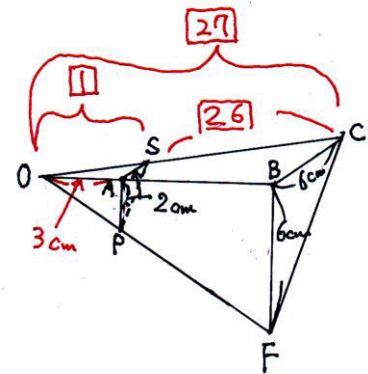
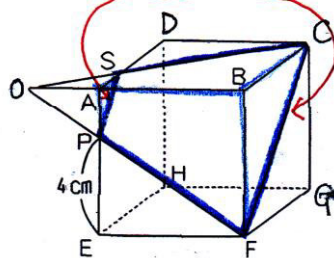
「底面積×高さ」より、



$$6 \times 6 \times \frac{6+1}{2} = 126 \text{ cm}^3$$

$$126 \text{ cm}^3$$

(2) **平行**



求める立体は上の図の**青枠部分**で、
大きな三角錐から小さな三角錐を引いたものです。

$$AP=AS=(6-4)=2 \text{ cm} \quad BF=BC=6 \text{ cm} \text{ より、}$$

$$OA:OB=AP:BF=2 \text{ cm}:6 \text{ cm}=1:3$$

$$OA:AB=1:(3-1)=1:2$$

$$OA \text{ の長さは } 6 \text{ cm} \times \frac{1}{2} = 3 \text{ cm}$$

また、

小さな三角錐と大きな三角錐の体積比は

$$(1 \times 1 \times 1) : (3 \times 3 \times 3) = 1 : 27 \text{ なので、}$$

求める **青枠部分**の体積比は

$$(27-1)=26 \rightarrow \text{小さい三角錐の26倍}$$

よって、

$$2 \times 2 \div 2 \times 3 \times \frac{1}{3} \times 26 = 52 \text{ cm}^3$$

$$52 \text{ cm}^3$$