

必修例題3 既約分数の個数と約数・倍数

1より小さく、分母が96の分数について、次の問いに答えなさい。

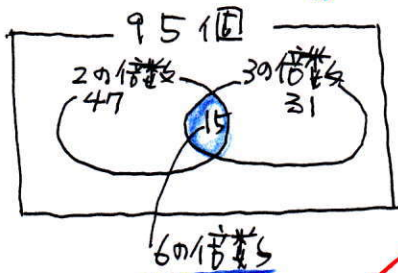
$$\frac{1}{96} \cdot \frac{2}{96} \cdot \frac{3}{96} \cdot \frac{4}{96} \cdot \dots \frac{94}{96} \cdot \frac{95}{96}$$

- (1) 既約分数は全部で何個ありますか。
 (2) 約分すると分子が1になるものは何個ありますか。ただし、 $\frac{1}{96}$ は除きます。

(1) 95個の分数から 約分のできる数を引きます。

(分母)
 96を素因数分解すると、
 $96 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$
 より、分子が2の倍数か3の倍数のときに約分されます。

- 2の倍数の個数は、
 $95 \div 2 = 47 \dots$ より 47個
- 3の倍数の個数は、
 $95 \div 3 = 31 \dots$ より 31個
- 6の倍数の個数は、
 $95 \div 6 = 15 \dots$ より 15個



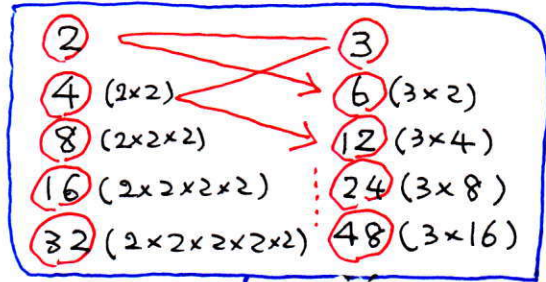
2の倍数と3の倍数がダブっている個数を引く。

約分できる個数は、
 $47 + 31 - 15 = 63$ (個)
 既約分数の個数は、
 (約分できない) $95 - 63 = 32$ (個)

32個

(2) 例えは、 $\frac{2}{96} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3} = \frac{1}{48}$
 となり分子が1になります。

すなわち、分子が



以上10個が約分すると分子が1になります。

10個

(別解) 分母の96の約数の個数を調べます。

約数の個数だけ分子が1になるから。

$$\begin{aligned} 96 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \\ &= 2^5 \times 3^1 \text{ と表すと約数の個数は,} \\ &= (5+1) \times (1+1) \\ &= 6 \times 2 \\ &= 12 \text{ (個)} \end{aligned}$$

{1, 96}は除くので、
 $12 - 2 = 10$ (個)